Bozóki Sándor

SÚLYOZÁS PÁROS ÖSSZEHASONLÍTÁSSAL ÉS ÉRTÉKELÉS HASZNOSSÁGI FÜGGVÉNYEKKEL A TÖBBSZEMPONTÚ DÖNTÉSI FELADATOKBAN

MTA SZTAKI-ba kihelyezett Gazdasági Döntések Tanszék

Témavezető: Dr. Rapcsák Tamás

Budapesti Corvinus Egyetem

Közgazdaságtani Ph.D. Program

SÚLYOZÁS PÁROS ÖSSZEHASONLÍTÁSSAL ÉS ÉRTÉKELÉS HASZNOSSÁGI FÜGGVÉNYEKKEL A TÖBBSZEMPONTÚ DÖNTÉSI FELADATOKBAN

Ph.D. értekezés

Bozóki Sándor

Budapest, 2006

Tartalomjegyzék

Táblázatok jegyzéke

Ábrák jegyzéke

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, dr. Rapcsák Tamásnak, amiért a szakmai támogatáson túl idejét nem kímélve rendkívül sokat tett mind e dolgozat, mind publikációim színvonalának növeléséért. Hálás vagyok azért, hogy az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Laboratórium és Osztály vezetőjeként az elméleti kutatások mellett gyakorlati problémák megoldásába is bevont.

Köszönet illeti minden munkatársamat, amiért az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Laboratórium és Osztályán az elmúlt négy évben kialakult szakmai és baráti kapcsolatok hatékonyabbá tették működésemet.

Köszönettel tartozom szerzőtársamnak, Dr. Robert H. Lewis-nak (Fordham University) az eredményes együttműködésért, Dr. Tangan Gao-nak (Michigan State University) a homotópiás algoritmus rendelkezésemre bocsátásáért, valamint Dr. Stefán Péternek (Nemzeti Információs Infrastruktúra Fejlesztési Program (NIIF) Szuperszámítógép Központ) a programok futtatásában nyújtott technikai segítségéért.

Az értekezés kidolgozásához igen hasznos észrevételeket és tanácsokat kaptam Dr. Berde Évától, Dr. Farkas Andrástól, Dr. Forgó Ferenctől, Dr. Fullér Róberttől és Dr. Temesi Józseftől, mindazonáltal a dolgozatban maradt hibákért kizárólag én vagyok felelős.

Kutatásomat nagymértékben elősegítette a konferenciákon való részvétel és az ott szerzett tudományos kapcsolatok. Mindez nem valósulhatott volna meg az Egyetemi Doktori Tanács és Dr. Zalai Ernő hozzájárulása nélkül.

Hálás vagyok szüleimnek és Török Mariannának támogatásukért, feltétlen segítőkészségükért és a lelkesítő szavakért.

Az értekezésben hivatkozott publikációim az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok OTKA-T029572, OTKA-T043276 és OTKA-T043241 számú pályázatainak támogatásával készültek.

1. Bevezetés

1.1. Többszempontú döntési problémák

Melyiket válasszam? – Ez a napi gyakorisággal felmerülő kérdés az emberi gondolkodás és viselkedés alapvető mozzanata. A válasz megkeresésére fordított energia- és időmennyiség elsősorban a probléma fontosságától függ. A kis jelentőségű feladatok megoldása egyszerű, rutinszerű, a komoly következményekkel járó döntéseket azonban mérlegelés előzi meg. Dolgozatom az utóbbi feladatosztályra koncentrál, azaz amikor a probléma fontossága megkívánja a részletes elemzést.

A teljesség igénye nélkül megemlítek néhány olyan magyarországi problémát, amelyek 2004-ben a sajtó által széles körben nyilvánosságra kerültek. A kérdéseket tárgyaló HVG-cikkek listáját az 1. Függelékben adom meg.

- Az M6-os autópálya koncessziós megépítésének és üzemeltetésének pályázata;
- Malév-privatizáció;
- A Nemzeti Tankönyvkiadó privatizációja;
- Harmadik generációs mobiltender;
- A nagykörúti villamosok megrendelése;
- MTV elnöki pozíciójára kiírt pályázat;
- Duna TV elnöki pozíciójára kiírt pályázat;
- Gépjárműeredetiség-vizsgálatra kiírt közbeszerzési pályázat;
- Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Program;
- A Fővárosi Közgyűlés utcabútor-tendere;
- Az informatikai és az oktatási tárca közös, középiskolai műholdas adatszórási programjának kivitelezésére kiírt pályázata;
- Antenna Hungária privatizációja;
- A gyógyászati segédeszközgyártó Rehab Rt. privatizációja.

A különböző területekről származó példák a következő közös tulajdonságokkal rendelkeznek:

– a szempontok között vannak egymásnak ellentmondók;

– nincs (matematikai értelemben vett) egyetlen legjobb megoldás;

– a döntésben szubjektív is tényezők szerepelnek.

A fenti feladatok között találhatók olyanok, amelyek komoly politikai és társadalmi konfliktushoz vezettek. A döntéshozatal folyamata a legtöbb példában nem nyilvános, ezért nehéz szakmai szempontból megítélni, hogy mi lehetett az oka az egyes pályázati értékelések, tenderek botrányba fulladásának. A tények mindenesetre rávilágítanak a szakmai megalapozottságú döntéselemzés szükségességére.

1.2. Az értekezés szerkezeti felépítése

A bevezetést követően a 2.1. alfejezetben a többszempontú döntési modelleket helyezem el a döntéselmélet szerteágazó rendszerében. A későbbi fejezetekben szükség lesz két közgazdaságtani alapfogalomra: a hasznosságra és a preferenciára (2.2).

A 3. fejezetben a többszempontú döntések alapfogalmai (3.1.), a szempontok súlyozására szolgáló módszerek (3.2.) és a legismertebb többszempontú döntési modellek (3.3-6.) mellett néhány esettanulmányra való hivatkozáson (3.7.) keresztül a gyakorlati alkalmazás lehetősége kerül bemutatásra.

Az értekezés új eredményei két feladattípus köré koncentrálódnak:

- szempontsúlyok meghatározása a többszempontú döntési feladatokban (4. és 5. fejezetek);
- valós döntési problémák modellezése és hasznossági függvények konstrukciója az alternatívák szempontok szerinti értékelésére (7. és 8. fejezetek).

A 4. fejezetben a páros összehasonlítás mátrix fogalmának definíciójával lehetőség nyílik a szempontok fontosságát kifejező szempontsúlyok meghatározására, csoportos döntési szituációkban pedig a döntéshozók szavazóerőinek számszerűsítésére. A páros összehasonlítás mátrix alapján történő súlymeghatározó módszerek (4.1.) közül a legkisebb négyzetek módszerét tárgyalom részletesen (4.2.), bemutatva a célfüggvény optimalizálási feladatának többváltozós polinomrendszer megoldására való átírását. A 4.3. pontban a polinomrendszerek megoldására szolgáló négy módszert tekintek át.

Az 5. fejezetben a 4. fejezet algoritmusainak alkalmazásával kapott számítási eredményeket használom fel. Kérdéseket vetek fel a döntéshozó által megadott páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciájának (következetlenségének) lehetséges mérőszámait illetően (5.1. és 5.3.), valamint a 3×3-as mátrixok esetében összehasonlítom a különböző súlymeghatározó módszerek eredményeit (5.2.).

A 6. fejezetben a növekedési mátrix fogalmát vizsgálom meg, amely kapcsolatot teremt a páros összehasonlítás mátrixok és a Leontief-féle input-output modellek között.

A 7. és 8. fejezetekben olyan alkalmazási és modellezési munkákat mutatok be, melyek során gyakorlati tapasztalatokra tettem szert az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Laboratórium és Osztályában.

Első feladatunk (7. fejezet) egy nemzetközi bank magyarországi részlegének megbízásából olyan, a banki projekteket rangsoroló módszer tervezése volt, amely lehetővé teszi a finanszírozás sorrendjének meghatározását. A többszempontú döntési probléma főszempontjait a bank szakemberei által megadott páros összehasonlítások segítségével számítottam ki, a projektek szempontok szerinti értékelését hasznossági függvények megadásával oldottuk meg.

A 8. fejezetben az Agyfarm (az akadémiai kutatás kollaboratív kommunikációs és tudásszervezési modellje on-line technológiai környezetben) rendszerében megfogalmazott döntési feladatokat dolgoztuk ki. A feladatok jelentős része többszempontú döntési problémaként értelmezhető, melyekben a szempontok fontosságát páros összehasonlításokon keresztül határoztuk meg. Az alternatívák szempontok szerint történő értékeléseinek mechanizmusára konkrét hasznossági függvény-konstrukciókkal adtunk javaslatot.

1.3. A dolgozat eredményei

1.3.1. Elméleti és módszertani eredmények

Értekezésemben rámutatok, hogy a páros összehasonlítás mátrixok alapján történő súlymeghatározásnak legismertebb módszere, a sajátvektor-módszer általános, minden feladattípusra történő alkalmazhatósága megkérdőjelezhető, így indokolt más, eddig kevésbé tárgyalt módszerek – mint pl. a legkisebb négyzetes közelítés – vizsgálata.

A páros összehasonlítás mátrixok alapján történő súlyozási módszerek közül a legkisebb négyzetes feladatot (LSM) oldottam meg a $3 \times 3, 4 \times 4, \ldots, 8 \times 8$-as mátrixokra. A minimalizálandó nemlineáris célfüggvény nemkonvexitása miatt az optimumhely általában nem egyértelmű.

A feladat megoldására korábban használatos Newton-iterációs technikáktól eltérően az általam tárgyalt módszerek az összes lokális és globális minimumhely megkeresésére alkalmasak. Tapasztalataim alapján a 3×3-as mátrixok esetére használható a rezultáns-módszer és a Gröbner-bázisok, 3×3-as és 4×4-es esetben az általánosított rezultánsokat alkalmazó Fermat szoftver, 3×3-astól 8×8-as méretig pedig a homotópiás kontinuitási módszer.

Önálló eredmények:

- a legkisebb négyzetes célfüggvény optimalizálási feladat átírása többváltozós polinomrendszer gyökeinek megkeresésére [S-1];
- 3×3-as esetben a rezultáns-módszer implementálása a Maple és a Matlab szoftverekben;
- tetszőleges méretű mátrix esetében az LSM-feladathoz tartozó polinomrendszer megadása [S-3].

Közös együttműködésben elért eredmények:

- a 4×4-es mátrixokból felírt 3 egyenletes 3 változós polinomrendszer megoldása a Lewis által implementált Fermat szoftverrel [S-2];
- Gao homotópiás algoritmusának alkalmazása a $3 \times 3, 4 \times 4,$ $\ldots, 8 \times 8$-as mátrixokból felírt polinomrendszerek megoldására [S-3].

1.3.2. Számítási tapasztalatok

Önálló eredmények:

A kutatás jelenlegi fázisában a 3×3-as esetben tudok páros összehasonlítás mátrixokat nagy számban generálni, majd azokból automatikusan LSM-súlyokat számolni. A sajátvektor (EM), a legkisebb négyzetes (LSM) és a szinguláris módszerek (SVD) összehasonlítása alapján az alábbi következtetésekre jutottam:

- a három módszerhez tartozó inkonzisztencia-mérőszámok közül a szinguláris jelentős eltérést mutat a másik kettőhöz képest. A közel konzisztens tartományban a szinguláris módszer inkonzisztencia-definíciója teszi leginkább lehetővé a döntéshozó következetlenségi fokozatainak megkülönböztetését;

- az EM-inkonzisztenciára felírt 10%-os szabály szerint elfogadhatónak minősített mátrixok LSM-értelemben is kis hibával közelíthetők;
- példát mutattam olyan mátrixra, amelynek EM-inkonzisztenciája 10% alatti, SVD-inkonzisztenciája viszont nagy;
- az inkonzisztencia mértékének növekedésével a különböző súlyozási módszerek által adott súlyvektorok egyre jobban eltérnek egymástól;
- magas inkonzisztencia-szint mellett az EM-megoldás az egyenlő súlyok $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ közelében marad, a legkisebb négyzetes megoldás pedig többnyire nem egyértelmű.

A páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciájának mérésére szolgáló EM-inkonzisztencia (CR) értéket nagy mintaszámú, véletlenül generált mátrixok statisztikai elemzésével közelítettem meg. Számításaim szerint az EM-inkonzisztenciára felírt 10%-os szabály lényeges különbséget mutat a mátrix méretének függvényében:

- $n = 3$-ra a véletlen mátrixok jelentős része (21%) elfogadható;
- $n = 4, 5$-re kis százaléka fogadható el;
- $n = 6, 7$-re található néhány elfogadható;
- $n = 8, 9, 10$-re egyetlen elfogadható inkonzisztencia-szintű mátrix sem fordult elő a több milliós mintában.

Az utóbbi eredmény jelenlegi formájában elsősorban kérdésfelvető célzatú: teremthető-e – és ha igen, milyen – kapcsolat a valós döntési szituációkban konkrét döntéshozó által konkrét problémára felírt páros összehasonlítás mátrixok és a véletlen módon generált mátrixok inkonzisztenciája között? A válaszokhoz további, a gyakorlati feladatokból származó mátrixokat is szerepeltető kutatás szükséges.

1.3.3. Alkalmazás: banki projektek rangsorolása

Első gyakorlati problémánkban egy nemzetközi háttérrel rendelkező bank projektjeinek rangsorolására adtunk modellt [S-4]. A feladatot egy nemzetközi bank magyarországi részlege megbízásából az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Osztályán végeztük el 2001/2002-ben. A feladat olyan rendszer tervezése és annak szoftveres megvalósítására vonatkozó javaslat elkészítése volt, amely egyidejűleg 50-100 projekt kezelésére alkalmas, az alternatívák dinamikusan változó halmazát is megengedve. A bank szakembereivel közösen kialakított szempontrendszert fastruktúrába rendeztük, majd a banki felsővezetés által megadott páros összehasonlításokból számított szempontsúlyokkal láttuk el. Ez lehetővé tette a rangsoroló mechanizmus működésének a banki stratégiákhoz való illesztését. A projektek (alternatívák) szempontok szerinti értékelését a bank által megadott támpontokon alapuló hasznossági függvények konstrukciójával javasoltuk. A objektív szempontok szerint történő értékelés az általunk konstruált hasznossági függvényeken keresztül automatikusan történik, a szubjektív szempontok szerinti értékelésre pedig egységes, áttekinhető skálákat vezettünk be, megkönnyítendő a folyamatban résztvevő döntéshozók munkáját. A bank 2002-ben vezette be az általunk javasolt módszertan alkalmazását, melynek sikeres működéséről írásbeli referenciát kaptunk.

Önálló eredmények:

- a bank felsővezetése és szakértői által kitöltött páros összehasonlítás mátrixok alapján **a szempontsúlyok meghatározása**;
- az alternatívák szempontok szerinti értékelési mechanizmusának kidolgozása, **hasznossági függvények konstrukciója** a bank képviselője által megadott instrukciók alapján;
- az Expert Choice szoftver alkalmazhatósági területének körülhatárolása.

1.3.4. Modellezés: Agyfarm

Második feladatunk az Agyfarm (az akadémiai kutatás kollaboratív kommunikációs és tudományszervezési modellje on-line technológiai környezetben) modellezésében az ajánló rendszer, a felhasználók közötti kapcsolatok feltárása, valamint a csoportképződés folyamatának döntési feladatként való megfogalmazása és megoldása volt [S-5]. Az Agyfarm modellezése a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Média Oktató és Kutatóközpontja (BMGE-MOKK), az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Osztálya, és a Frutta Elettronica közös együttműködésében készült.

Az Agyfarm többezres felhasználói létszámra, több tízezres oldal- és dokumentumszámra tervezett rendszerében valós időben működő ajánlásra, a felhasználói aktivitás követésére és azt a rendszerbe történő visszacsatolásra, a felhasználók egymás közötti kapcsolatainak létrehozására és erősítésére, valamint a működtetés során fellépő döntési feladatok kezelésére adtunk javaslatot. A szempontok súlyainak meghatározására páros összehasonlításokat és közvetlen súlyozást alkalmaztunk.

Önálló eredmények az alábbi feladatokban születtek:

- döntési problémaként kezelhető feladatok azonosítása és modellezése;
- többszempontú döntési problémák szempontrendszerének kidolgozása;
- **szempontok szerinti értékelési mechanizmusok (hasznossági függvények) konstrukciója**;
- **szempontsúlyok kiszámítása páros összehasonlítás mátrixok alapján**;
- az Agyfarmban szereplő felhasználói profilok ill. értékelések hasonlóságának mérésére szolgáló lehetőségek áttekintése.

2. A döntéselmélet interdiszciplinaritása

Az értekezésben a közgazdaságtan alapfogalmai közül a **preferencia** és a **hasznosság** gyakorlati alkalmazásának lehetőségeit vizsgálom meg a döntéselméletben, ezen belül a többszempontú döntési feladatokban. A döntéselmélet fogalmának körüljárását és más tudományágakkal való kapcsolatának bemutatását (2.1. alfejezet) követően a hasznosság(i függvény), a preferencia relációk és rendezések definícióit írom fel (2.2. alfejezet).

2.1. A döntések elméletei

Szerencsésnek mondhatja magát az, akinek lehetősége van egy új tudományág kibontakozásának, fejlődésének folyamatát testközelből szemlélni, még akkor is, ha szakmai elmélyülésre – kognitív és fizikai korlátaiból adódóan – csak egy-egy szűkebb területen van reális esély. A döntéselmélet éppen egy ilyen fiatal, a klasszikus és modern tudományágak szinte mindegyikéhez kapcsolódó diszciplína. Gyökerei egyidősek az emberi gondolkodással, a mai értelemben vett tudományos elméletei és modelljei azonban alig idősebbek félszáz évnél. A döntések tudományainak még rövid áttekintése is meghaladná e dolgozat kereteit, ezért a későbbi fejezetekhez nem szorosan kapcsolódó területre csak hivatkozni tudok. Helyzetemet megkönnyíti, hogy rendelkezésre állnak olyan, a döntéselméletet a maga sokszínűségében tárgyaló munkák, mint Temesi: *A döntéselmélet alapjai* [121], Kindler: *Fejezetek a döntéselméletből* [67], Zoltayné Paprika Z.: *Döntéselmélet* [135], Fishburn: *Utility Theory for Decision Making* [41] és Keeney, Raiffa: *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs* [63] című könyve.

Kindler a döntéseket a problémamegoldás rendszerszemléletű elméletébe ágyazva közelíti meg. Egy teljes fejezetet szentel az egyes döntéselméleti felfogásmódjainak, irányzatainak jellemzésének. Ezek közül a normatív irányzat az, amelyhez értekezésem szervesen kapcsolódik. A normatív vagy preskriptív (előíró) megközelítés szerint a feladat olyan modellek építése, amelyek segítenek egy adott követelményrendszerhez, szabályokhoz igazodni. A hangsúly tehát a *„hogyan kell dönteni?”* kérdésen van.

A leíró vagy deskriptív döntéselmélet ezzel szemben a ténylegesen megszületett döntések utólagos magyarázatával foglalkozik, tehát azzal, hogy *„hogyan döntünk valójában.”*

A döntéselmélet más tudományokhoz való kapcsolódási pontjait az 1. táblázatban mutatom be, melyet [135, 54. o.] alapján néhány elemmel kiegészítve állítottam össze.

Tudományterület	*Kapcsolata a döntéselmélettel*
Közgazdaságtan (mikroökonómia)	Hasznosság és preferencia, játékelmélet, közösségi döntések
Filozófia	Értékek és etika
Pszichológia	Az egyén viselkedése, a gondolkodási folyamat mechanizmusa
Matematika, operációkutatás	Modellezés, aggregáló függvények, szimuláció, optimalizálás
Statisztika	Bizonytalanság melletti döntéshozatal, statisztikai döntéselmélet
Jog	Jogszabályok, törvények
Környezet- és mérnöktudományok	Hatástanulmányok, szakértői vélemények és értékelések
Szociológia, szociálpszichológia	A csoport viselkedése döntési helyzetekben
Informatika	Döntéstámogató szoftverek, mesterséges intelligencia, algoritmusok implementálása
Politika	A döntéshozatal gyakori színtere
Antropológia	Hagyományok, normák, szokások

1. táblázat *A döntéselmélet kapcsolódási pontjai más tudományokhoz*

A filozófia, mint a modern tudományágak közös gyökere, a kezdetektől fogva központi kérdésnek tekintette a döntések elemzését. A filozófiai megközelítésben is szerepeltek az emberi értékeknek a piacon megjelenő formái: a termékek és szolgáltatások. Adam Smith-ig azonban a *jóság*gal szemben nem tulajdonítottak különösebb jelentőséget a piaci értékeknek. Smith álláspontja szerint hogy csak olyan fogalmakkal érdemes tudományos szempontból foglalkozni, amelyeket valamilyen formában mérni lehet. Az első ilyen kvantitatív fogalom a hasznosság, mint az igények kielégítésének képessége lett. A hasznossággal részletesebben is foglalkozom a következő alfejezetben.

A döntések etikai vonatkozásait részletesen bemutatja Zsolnai: *A döntéshozatal etikája* című könyve [136], valamint [135, 11. fejezet] és [15].

A döntéshozóról feltételezett racionalitás első komoly kritikája Herbert Simon munkáiban [109, 110] lelhető fel. Mind elméleti, mind tapasztalati eredmények alapján rámutatott, hogy az emberek általában nem maximalizálják hasznosságukat, hanem megelégednek kielégítő döntésekkel: bizonyos szint elérése után már nem érdekeltek a további optimalizálásban. Kockázat melletti döntési szituációk esetében Tversky [125], majd Kahneman, Slovic és Tversky kísérletsorozatai [59, 94] rámutattak a pszichológia fontosságára a döntéselméletben. A racionalitás témakörének itt nem tárgyalt kérdéseit áttekintő összefoglalás [136, 13-20. o.] rámutat a döntéselemzés etikai, szociológiai és ökológiai vonatkozásaira.

A matematika ill. operációkutatás alkalmazási lehetőségeit itt nem részletezem, az értekezés további fejezetei erről remélhetőleg tanúskodnak majd.

A gyakorlati problémák megoldása elképzelhetetlen a jogszabályi és törvényi lehetőségek figyelembevétele nélkül. Külön kiemelendő a közbeszerzési törvény, mivel a pályázatok elbírálása természeténél fogva többszempontú döntési feladat.

Az utóbbi években egyre több környezeti problémával szembesülő döntéshozók számára nélkülözhetetlenek az előzetes hatástanulmányok és szakértői vélemények. Ezek a probléma jellegétől származhatnak környezettudományi vagy mérnöki területről.

A döntések modellezése a gyakorlati feladatok többségében döntéstámogató funkciót tölt be. A döntések konkrét környezetének alapvető meghatározója a politika. Lényegét tekintve a törvényi keretekhez hasonlítható, noha a szabályok kevésbé rögzítettek és áthághatatlanok.

A döntési szituációk környezetének szempontjából megkerülhetetlenek az adott közösség hagyományai, normái és szokásai (antropológia). Lényeges eltérések adódhatnak a normatív módon javasolt modell és annak gyakorlati megvalósulása között.

A számítástechnika utóbbi évtizedekben tapasztalt fejlődése lehetővé tette a döntéselméleti módszerek szoftveres megvalósítását. Amint arra Temesi [121, 132. o.] is felhívja a figyelmet a felhasználóbarát döntéstámogató szoftverek elterjedésével annak a veszélye is megnőtt, hogy a bizonyos feladattípusokban bevált módszereket később szélesebb körben, szakmai kontroll nélkül is alkalmaznak. Az informatikai környezet tehát szükséges, de nem elégséges feltétele a döntési feladatok modellezésének és megoldásának.

A gyakorlat és számtalan kísérlet bebizonyította, hogy a csoportos döntések lényeges eltéréseket mutatnak az egyénivel összehasonlítva. Az üzleti és politikai döntések nagy hányada csoportos döntéshozatal során születik, ezért fontos a szociológia és a szociálpszichológia eredményeinek ismerete.

Elmondható tehát, hogy a döntések számos irányból megközelíthetők, ugyanakkor változatlanul igaz Kindler 1991-ben tett megállapítása [67, 23. o.], miszerint „egyetemesen elfogadott, univerzális döntéselmélet azonban jelenleg még nincs”.

2.2. Hasznosság és preferencia

A hasznosság fogalmát az értekezésben tárgyalt többszempontú döntési modellekben az alábbi két területen használom fel:

- a 3.3. fejezetben szereplő modellek az alternatívák szempontok szerinti értékeléseit aggregáló módszerek, melyek alkalmazhatóságának alapfeltétele, hogy az alternatívákat a szempontok alapján külön-külön ki lehet értékelni, majd az értékeléseket valamilyen szabály szerint aggregálni. Ugyanez a függetlenségi feltevés húzódik meg a hasznossági függvények dekomponálhatóságának kérdése mögött. A dekompozíciós lehetőségek közül a leggyakoribb a hasznossági függvény additív alakban való felírása [41].

- adott alternatíva adott szempont szerint történő értékelésében azt kell számszerűsíteni, hogy az alternatíva milyen mértékben felel meg az adott szempontból, azaz mennyire „jó". E kérdés megválaszolása a hasznosságelmélet alapfeladata. Konkrét hasznossági függvénykonstrukciókat a 7. és 8. fejezetekben szereplő alkalmazási és modellezési munkákban adtunk meg.

2.2.1. A hasznosság fogalma

A hasznosság a latin *utilitas* szóból származik, melynek jelentése hasznosság, haszon, előny.

Arisztotelész *Nikomakhoszi etika* című könyvében [2] a cserék tárgyalásakor a különböző javak összemérhetőségi lehetőségeire a szükségleteknek való megfelelést és a pénzt találja alkalmasnak. A cserék igazságosságának vizsgálatában megkülönbözteti tehát a használati érték és a csereérték fogalmát. Sokan ezt a munkát a hasznosságfogalom első megjelenéseként értelmezik [4].

Aquinói Szent Tamás Arisztotelész-kommentárjaiban a cserefolyamatban szereplő termékek igazságos árának meghatározásában nemcsak az előállításhoz felhasznált munkát és költségeket veszi figyelembe, hanem a termék szükségletkielégítő képességét is. Az árban tehát együtt szerepel a használati érték és a csereérték [4].

A szerencsejátékok népszerűsége a valószínűségszámítás kialakulása mellett a hasznosságfogalom fejlődéséhez is nagy mértékben hozzájárult. A szentpétervári paradoxon[1] – nevével ellentétben – nem ellentmondást takar, hanem arra mutat rá, hogy a játékosok preferenciái nem tükrözik a matematikai várható értékből következő eredményeket. A nagyon kis valószínűségű eseményt (pl. 100-adik dobásra lesz először fej) az emberi gondolkodás már elhanyagolhatónak tekinti, akkor is, ha a hozzá tartozó nyeremény óriási (2^{99} dukát). További nehézség a mindennapi realitástól elrugaszkodott, csillagászati összeg kezelése. Valóban 8-szor olyan annyira csábító-e egy $2^{103} \approx 1.01 \cdot 10^{31}$ dukátos nyeremény, mint a $2^{100} \approx 1.27 \cdot 10^{30}$ egy olyan játékosnak, aki nem is látott még néhány száz vagy ezer dukátnál többet? Bernoulli rámutatott, hogy nem, ha viszont a hasznossági függvényt a nyeremény logaritmusával definiáljuk, akkor a játék ára már véges. A logaritmikus függvény analitikus tulajdonságaiban (szigorúan monoton növekvő, de a deriváltja csökkenő) a csökkenő határhaszon elve ismerhető fel, amelyet Gossen fogalmazott meg 1854-es megjelenésű, „Az emberi kapcsolatok törvényének kialakulása" című könyvében [49].

A közgazdaságtanban először Galiani élt a hasznosság (*utilità*) fogalmával 1751-ben a *Della moneta* című művében. Jelentése: örömet okozó képesség. A hasznosságot olyan jellemző mennyiségnek, mértéknek tekintette, mint a tárgyak fizikai tulajdonságai (pl. tömeg, térfogat, hőmérséklet).

Bentham 1776-ban megjelent *Töredékek a kormányról* (Fragments on Government) című munkájában szerepel a „legnagyobb boldogság elve" és a „hasznosság elve". Ezek szerint a *jó* fogalma a boldogságon keresztül közelíthető meg, az emberek célja pedig az elérhető legnagyobb boldogság megtalálása, másszóval: a hasznosság maximalizálása. A hasznosságot úgy definiálja, mint „bármely dolog tulajdonsága, képessége ... hogy örömöt, jóérzést, bol-

[1] Nicholas Bernoulli és tőle függetlenül Cramer a következő játékot vizsgálta: Egy szabályos pénzérmét ($\frac{1}{2}$ valószínűséggel fej, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel írás) addig dobálunk, amíg fej nem lesz. Ha már az első dobásra fejet kapunk, a nyeremény 1 dukát (korabeli aranypénz), ha az eredmény írás, akkor újra dobunk. Ha a második dobás eredménye fej, akkor a nyeremény 2 dukát, írás esetén újabb dobás következik. A nyeremény (fej esetén) minden dobásnál duplázódik, tehát ha k-adik dobásra lett legelőször fej az eredmény, akkor a kifizetés 2^{k-1} dukát. Röviden tehát: a játékos nyereménye $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 1 dukát, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 2 dukát, $\frac{1}{8}$ valószínűséggel 4 dukát, és így tovább. A kérdés, milyen áron lehet ezt a játékot árulni, azaz mekkora összeget fizessen a játékos a belépésért. Könnyen ellenőrizhető, hogy a kifizetés várható értéke végtelen, a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} 2^{i-1}$ sor ugyanis divergens. A játék ára tehát végtelen, ami ebben a megfogalmazásban meglepő, hiszen senki sem játszana olyan játékot, amelynek az ára nem véges (pl. 4, 10 vagy 100 dukát). A szentpétervári paradoxon néven ismertté vált problémát Nicholas Bernoulli 1713-ban Pierre Rémond de Montmort -hoz írt levelében írta le, aki még ugyanabban az évben beillesztette azt az *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* című könyvébe. Unokatestvére, Daniel Bernoulli publikálta 1738-ban [7].

dogságot keltsen, hogy megelőzze ... a fájdalmat, a rosszat és a boldogtalanságot".

Bentham megkülönbözteti az egyén hasznosságát a társadalométól; és mivel elismeri az egyén önérdekkövető viselkedését, olyan törvények alkotását tartja szükségesnek, amelynek keretei között az egyéni hasznosságmaximalizálás egyúttal a társadalmi hasznosságot is maximalizálja. A legtöbbször Bentham nevéhez kapcsolt utilitarizmus kialakulásához Brown, Tucker és Paley angol teológusok, Helvetius és Holbach francia filozófusok, Beccaria és Verri olasz közgazdászok és James Mill [84] angol közgazdász is jelentősen hozzájárultak.

Jevons 1871-ben megjelent, *A politikai gazdaságtan elmélete* című munkájában [58] a benthami utilitarianizmusra építve az egyén hasznosságmaximalizálásában egy szubjektív érték, a hasznosság foka (degree of utility) játszik döntő szerepet. Több termék fogyasztása esetén olyan allokáció maximalizálja az egyén hasznosságát, amelyben a termékek felhasználásával a hasznosság végső foka (final degree of utility) megegyezik (Gossen II. törvénye). Jevonstól és Gossentől függetlenül, Cournot és Dupuit, majd Carl Menger és Walras is kidolgozta ugyanezt az elméletet.

Jevons – Sayhez hasonlóan – korának klasszikus munkaérték-elméletével szemben a szubjektív hasznosságon alapuló értékelméletet tartotta megfelelőnek.

Edgeworth a boldogság kiszámítására adott módszereivel [33] szintén a benthami utilitarianista irányt követte. A számokkal kifejezett hasznosságot a közömbösségi görbékre adott formuláiban használta fel.

Pareto [88] találmánya az *ophelimity* kifejezés, melyet a görög „$\omega\phi\epsilon\lambda\grave{\iota}\mu o\varsigma$" (jelentése: előnyös, hasznos, jótékony) alapján vezetett be. Az ophelimity elnevezést a szükséglet- vagy vágykielégítő képességre vezette be, megengedve az esetlegesen etikailag vagy törvény által kifogásolható javak (pl. fegyverek, drogok) ezen tulajdonságát is. A hasznosság (utility) elnevezést fenn kívánta tartani a „valóban" hasznos tulajdonság kifejezésére, szerinte ugyanis a hasznosság általában az ártalmasság, veszedelmesség, gonoszság (perniciousness) ellentéte.

A 19. században komoly problémát okozott a hasznosságot legjobban kifejező szó kiválasztása. A vitát végül Marshall zárta le 1898-ban [81]: „Ophelimity, ... Agreeability, Enjoyability, Desirability, etc., are not faultless [but] it seems best for the present to adhere to Utility in spite of its faults." [2]

Pareto korában a hasznosságot kardinális értelemben kezelték, azaz feltették, hogy mérhető, számokkal jellemezhető. Ezzel a hagyománnyal sza-

[2]szabadfordításban: az előnyösség, kellemesség, élvezhetőség, kívánatosság, stb. kifejezések sem hibátlanok; legjobb, ha megmaradunk a hasznosságnál, még ha nem is tökéletes.

kített Pareto, amikor az ordinális preferencia-elmélet alapjait lefektette. Az Edgeworth által bevezetett (kardinális) közömbösségi görbék elméletét ordinális megközelítésben fejlesztette tovább. Megmutatta, hogy a hasznosság a fogyasztónak a különböző fogyasztói kosarakon értelmezett preferencia-rendezéseként is értelmezhető.

Kortársai közül Volterra [128] ismerte fel elsőként az eredmény jelentőségét. A hasznossági függvény előállításának problémája (integrálhatóság) a két termék fogyasztásának esetére felírt differencia-egyenlet megoldásának során merült fel.

Edgeworth, Fisher, Pareto és Slutsky ordinális preferencia-elmélete a hagyományos kardinális felfogás alternatívájává fejlődött.

2.2.2. Hasznosság a bizonytalanság melletti döntéshozatalban

A szentpétervári paradoxon nemcsak arra világított rá, hogy a gyakorlatban a nyeremény várható értéke nem képes magyarázni a játékosok döntéseit, tehát szükség van egy hasznossági függvényre, hanem arra is, hogy a valószínűség matematikai és hétköznapi értelmezése nem feltétlenül esik egybe. Cournot 1843-ban [23] megkülönböztette az objektív és szubjektív valószínűség fogalmát [3]. A várható hasznosság elméletét (expected utility theory) Ramsey [96] vezette be 1931-ben. Karl Menger 1923-ban írt dolgozatában a szentpétervári paradoxon vizsgálata során már használta a szubjektív valószínűség fogalmát, eredményeit azonban csak 1934-ben [82] publikálta. Ez lendületet adott a teljes, formalizált Neumann-Morgenstern-féle hasznosságelmélet [87] kibontakozásához is, amely Wald statisztikai döntéselméletéhez [130] és Savage szubjektív várható hasznosságelméletéhez [108] hasonlóan évtizedekre meghatározta a kutatások irányát.

A Neumann-Morgenstern-féle hasznosságelmélet axiómáinak vizsgálatát és a döntéselmélettel való kapcsolatát Luce és Raiffa [79], majd Fishburn [41] tárgyalta.

A várható hasznosság elméletének alapfeladata és a többszempontú döntések közötti kapcsolatot a 3.3-4. alfejezetekben írom fel.

[3] a valószínűség értelmezésének változatosságát Keeney és Raiffa listája mutatja [63, 134. o.], melyből néhány elem: matematikai valószínűség, empirikus valószínűség, pszichológiai valószínűség, esélyesség, relatív gyakoriság, statisztikai valószínűség, hihetőség.

2.2.3. A társadalom hasznossága

Amit a mai szóhasználat Pareto-hatékony, vagy Pareto-optimális allokációnak nevez az általános egyensúly elméletek tárgyalásakor, azt maga Pareto a „társadalmi hasznosság maximumának” tekintette. A jóléti közgazdaságtan tételeinek alapjait a *Manuale d'economia politica* című könyvének [89] 6. fejezetében és matematikai függelékében fektette le.

A *Trattato di Sociologia Generale* című munkájában [90] bevezette a társadalmi jóléti függvény (social welfare function) fogalmát, és azt

$$W = F(U_1, U_2, \ldots, U_m)$$

alakban írta fel, ahol U_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ az egyének hasznossági függvényei, $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ pedig minden argumentumában növekvő függvény. Az U_i hasznossági függvény argumentumában viszont nemcsak az i-edik szereplő fogyasztása szerepel, hanem az összes többi egyéné is. Pareto megjegyzi, hogy az állam akkor tud jó társadalmi jóléti függvényt definiálni, ha az egyénekhez súlyokat rendel. Ez a csoportos döntési problémákban a döntéshozók szavazóerőinek feleltethető meg.

2.2.4. Preferencia relációk és preferencia rendezések

Ebben a pontban a preferencia relációk és rendezése bevezetését követően a preferenciák reprezentálhatóságát tekintem át. A jelöléseket Temesi: *A döntéselmélet alapjai* című könyvéhez [121] igazítom.

Legyen X egy tetszőleges halmaz, melynek számosságára egyelőre nem teszünk kikötést. A halmaz elemeit olyan választási lehetőségeknek (alternatíváknak) tekinthetjük, amelyekkel egy adott döntéshozó szembesül.

Rögzítve egy döntéshozót, azzal a feltevéssel élünk, hogy tetszőleges (x, y) rendezett pár $(x, y \in X)$ esetén az alábbi három eset lehetséges:

- x szigorúan preferált y-hoz képest: $x \succ y$
  (vagy ellenkezőleg: y szigorúan preferált x-hez képest: $y \succ x$);
- x és y indifferensek: $x \sim y$;
- x és y összehasonlíthatatlanok: $x \, ? \, y$.

Ugyanez a bináris reláció úgy is előállítható, ha a szigorú preferencia helyett az „x nem rosszabb, mint y” tulajdonságot leíró $\succeq$ relációt vesszük alapul. (x, y) rendezett pár $(x, y \in X)$ esetén az analóg három eset:

- $x \succeq y$, de NEM$(y \succeq x) \Longrightarrow x \succ y$
  (vagy ellenkezőleg: $y \succeq x$, de NEM$(x \succeq y) \Longrightarrow y \succ x$;

- $x \succeq y$ és $y \succeq x \Longrightarrow x \sim y$;
- NEM($x \succeq y$) és NEM($y \succeq x$) $\Longrightarrow x?y$.

Definíció. *Egy X halmazon értelmezett $\mathfrak{R}$ reláció*

reflexív, *ha* $x\,\mathfrak{R}\,x$;

irreflexív, *ha* NEM($x\,\mathfrak{R}\,x$);

szimmetrikus, *ha* $x\,\mathfrak{R}\,y \Longrightarrow y\,\mathfrak{R}\,x$;

aszimmetrikus, *ha* $x\,\mathfrak{R}\,y \Longrightarrow$ NEM($y\,\mathfrak{R}\,x$);

antiszimmetrikus, *ha* $x\,\mathfrak{R}\,y$ *és* $y\,\mathfrak{R}\,x \Longrightarrow x = y$;

teljes, *ha* $x\,\mathfrak{R}\,y$ *és* $y\,\mathfrak{R}\,x$ *közül legalább az egyik teljesül*;

tranzitív, *ha* $x\,\mathfrak{R}\,y$ és $y\,\mathfrak{R}\,z \Longrightarrow x\,\mathfrak{R}\,z$;

bármely $x, y, z \in X$ *esetén.*

Egyszerűen belátható, hogy a $\succ$, $\sim$, $\succeq$, ? bináris relációkra teljesülnek az alábbiak:

$x \succ y \Rightarrow$ NEM($y \succ x$), azaz $\succ$ aszimmetrikus;

$x \sim x$, azaz $\sim$ reflexív;

$x \succeq x$, azaz $\succeq$ reflexív;

$x \sim y \Rightarrow y \sim x$, azaz $\sim$ szimmetrikus;

$x?y \Rightarrow y?x$, azaz ? szimmetrikus;

NEM($x?x$), azaz ? irreflexív;

NEM($x \succ x$), azaz $\succ$ irreflexív.

Definíció. *Egy tranzitív relációt* ***rendezés****nek nevezünk.*

Attól függően, hogy a tranzitivitás mellett milyen tulajdonságokat teszünk fel még a relációra, a rendezések különböző típusai adódnak, melyek részletesebb tárgyalását [121, 49. o.] adja. Számunkra a három legfontosabb típus:

- gyenge rendezés: reflexív és teljes;

- lineáris rendezés: antiszimmetrikus, reflexív és teljes;

- szigorú lineáris rendezés: irreflexív és teljes.

Definíció. *Legyen $\succeq$ gyenge rendezés az X halmazon. Azt mondjuk, hogy az $u : X \to \mathbb{R}$ függvény **reprezentálja** a $\succeq$ preferenciát, ha bármely $x, y \in X$ elemekre*

$$\begin{aligned} x \succ y &\iff u(x) > u(y), \text{ és} \\ x \sim y &\iff u(x) = u(y). \end{aligned}$$

Megjegyzés. A definíció mutatja, hogy eleve csak olyan rendezés esetén lehet reprezentálhatóságról beszélni, amely reflexív és teljes, vagyis gyenge.

A preferenciák valós értékű függvénnyel való reprezentálhatóságának lehetőségét Wold [131] vetette fel. A Debreu-által bizonyított tételt [27] itt egy speciális esetre mondjuk ki, megjegyzendő azonban, hogy lényegesen általánosabb feltételek mellett is igaz [41]. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, és vezessük be az $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times X$ rendezett párok halmazán értelmezett $\geq$ relációt a következőképpen:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \iff x_i \geq y_i \text{ minden } i = 1, 2, \ldots, n\text{-re, és} \\ \text{létezik olyan } j \text{ index, hogy } x_j > y_j.$$

Tétel. *Legyen $\succeq$ gyenge rendezés az X halmazon. Tegyük fel, hogy*

(1) $\succeq$ ***monoton,*** *azaz bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ esetén*

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \implies \mathbf{x} \succ \mathbf{y};$$

(2) $\succeq$ ***folytonos,*** *azaz bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \in X$ esetén, ha $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \succ \mathbf{z}$, akkor egyértelműen létezik olyan $\lambda \in (0, 1)$, hogy*

$$\mathbf{y} \sim \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{z}.$$

Ekkor létezik olyan $u : X \to \mathbb{R}$ függvény, amely reprezentálja $\succeq$-t.

Az u függvényt a közgazdasági irodalomban **hasznossági függvény**nek, a döntéselméletben pedig **értékelő függvény**nek nevezik [121, 51. o.]. Dolgozatomban az általánosabb hasznossági függvény elnevezést fogom használni, még akkor is, ha konkrét esetekben értékelésre vonatkozik.

A tétel nem állítja a hasznossági függvény egyértelműségét. A definícióból következik, hogy egy hasznossági függvény tetszőleges szigorúan monoton transzformáltja is hasznossági függvény.

Nem minden rendezés reprezentálható valós függvénnyel: Luce és Suppes [80] megmutatták, hogy a lexikografikus rendezés nem folytonos.

Többdimenziós feladatokban felmerül a hasznossági függvény dekomponálhatóságának kérdése: felírható-e a komponenseken értelmezett egydimenziós hasznossági függvények valamilyen aggregálásaként. Az egyik legkézenfekvőbb megoldás a hasznossági függvény additív alakban való megadásának lehetősége, mely a többszempontú döntési modellek egyik fő osztályának elméleti alapját képezi (lásd 3.3. fejezet). A hasznosságelmélet felépítésében oroszlánrésze volt Fishburnnek: Keeney és Raiffa könyvében csak az additív hasznossági függvényt tárgyaló fejezet bevezetőjében [63, 295. o.] 11 db Fishburn-hivatkozás szerepel, a könyv egészében pedig 19.

Ha az $X \subseteq \mathbb{R}^n_+$ halmaz elemeit fogyasztói kosarakként értelmezzük, akkor a hasznosság dekomponálhatósága mögött az a feltételezés áll, hogy a fogyasztói kosár egyes termékeihez lehet külön-külön, egymástól függetlenül hasznosságot rendelni. Additív esetben:

$$u(\mathbf{x}) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \ldots + u_n(x_n),$$

ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u : X \to \mathbb{R}$, és $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

A additív, kvázi-additív és multiplikatív dekompozíciós tételek összefoglalását, valamint a hasznossági függvények gyakorlatban történő előállítását [41, 121] mutatja be.

A hasznossági függvény fogalmának gyakorlati problémákban történő felhasználására az értekezés alkalmazási (8.) és modellezési (9.) fejezetében mutatok konkrét példákat. Az esettanulmányokban szereplő problémákat többszempontú döntési feladatként megfogalmazva, az egyes szempontok szerint történő értékelésekre mutatok számszerű hasznossági függvénykonstrukciókat.

3. Többszempontú döntési modellek

Az 1.1. és 2.1. alfejezetekben bemutattam, hogy döntési szituációk a mindennapi és a gazdasági, politikai életben is számos formában megfogalmazódnak. Az értekezés további részében a döntési problémák egy részosztályával, a többszempontú döntési feladatokkal[4] foglakozom, melynek alapfeladatát röviden a következőképpen lehet megfogalmazni: az alternatívák adott, véges számú halmazából véges számú szempontnak összességében legjobban megfelelő legjobb alternatíva kiválasztása vagy az alternatívák rangsorolása.

Ennek megfelelően az értekezésnek nem témája a többcélú optimalizálással megoldandó döntési feladatok[5] és a 3.2. alfejezetben felírt feladattól eltekintve a bizonytalanság melletti döntéshozatal sem.

A fejezet a döntési feladatok alapfogalmainak tárgyalásával (3.1.) kezdődik, majd a többszempontú döntési feladatok szempontsúly-rendszerének meghatározására szolgáló legismertebb eljárások áttekintésével (3.2.) folytatódik. Ezt követően az elmúlt fél évszázadban megjelent legismertebb többszempontú döntési modelleket és módszertanokat sorolom fel, amelyek véges sok alternatíva véges sok szempont szerinti kiértékelését adottnak véve, a legjobb alternatíva kiválasztására, illetve az alternatívák rangsorolására szolgálnak. A modellek három csoportba rendezhetők:

- elemi szabályok (3.3.),
- az alternatívák szempontok szerinti értékeléseit a szempontsúlyok figyelembevételével aggregáló módszerek (3.4.), és az
- outranking rangsoroló eljárások (3.5.)

A fejezetet néhány külföldi esettanulmányra való hivatkozás (3.6.) zárja.

3.1. A döntési feladatok alapfogalmai

3.1.1. Alternatívák

Egy döntési probléma során felmerülő választási lehetőségeket nevezzük *alternatívák*nak. A feladat jellegétől függően ezek lehetnek tárgyak, pá-

[4]A többszempontú döntési modellezésre az angol nyelvű irodalomban a Multi-Attribute Decision Making (MADM) és a Multi-Criteria Decision Making (MCDM) elnevezések használatosak.

[5]Multi-Objective Decision Making (MODM).

lyázók vagy pályázatok, stratégiai döntések, időpontok, helyszínek, stb. A modellezés folyamatának első és egyik legfontosabb feladata az alternatívák megadása.

Az alternatívák (véges) halmaza a döntési feladatok nagy részében rögzített, más esetekben dinamikusan változik. Utóbbira a 7. fejezetben szereplő banki alkalmazásban, valamint a 8. fejezetben szereplő automatikus ajánlórendszer modellezésében mutatok példát.

3.1.2. A döntési feladat célja és szempontjai

A döntési feladat céljának pontos megadása alapvető fontosságú információ a döntéshozó(k) és a modellépítő(k) közötti kommunikációban. A döntési feladat céljának az állapot tekinthető, amelyben a döntéshozó a rendszert látni szeretné. A célok gyakran filozofikus jellegűek és – különösen nagyméretű problémák esetén – nem adhatók meg egyetlen kifejezéssel vagy mondattal. A szempontok[6] megadása ad lehetőséget arra, hogy a célokat strukturáltan és kezelhető módon fogalmazzuk meg.
A szempontok meghatározásának legfontosabb kritériumai a következők:

- teljesség: a döntési feladatot minél jobban leírja;
- kezelhetőség: olyan szempontok szerepeljenek, amelyek alapján lehet értékelni és az eredményeket számszerűsíteni;
- felbonthatóság: a döntési feladat részekre bontásával kapott szempontok alapján az alternatívák értékelhetők legyenek;
- redundancia minimalizálása: egy-egy szempont ne jelenjen meg többször. A modellezőnek figyelembe kell vennie azt, hogy ugyanazon jelenség egészen különböző formákban és elnevezések alatt megjelenhet;
- minimalitás: a problémát adott mélységig leíró modellek közül a legkisebb elemszámú legyen. Tekintettel kell lenni a gyakorlati megvalósítás fizikai és humán korlátaira.

A döntési feladat céljainak legjobban megfelelő szempontrendszer meghatározására az egyik leggyakrabban alkalmazott technika a fastruktúrába történő rendezés. Az összetett problémák dekomponálási lehetőségének modellezés szintjén történő első alkalmazása az 1960-as években a NASA-ban

[6] szokásos elnevezések még: kritériumok, értékelési tényezők

használt PATTERN (Planning Assistance Through Evaluation of Relevance Numbers) módszer [92, 93, 30]. A szempontok hierarchikus elrendezésének módszerét Keeney és Raiffa [63, 41. o.] részletesen tárgyalja, de a szempontfa[7] alkalmazásának elterjedésében a Saaty által bevezetett Analytic Hierarchy Process módszertan [106] szerepe vitathatatlan.

A szempontok általában nem egyformán fontosak, szükség van tehát olyan módszerre, amely a szempontokat fontossági súlyokkal látja el úgy, hogy az a döntéshozó céljaival harmóniában álljon. A szempontok súlyozására szolgáló módszerek közül néhányat a 3.2. alfejezetben tekintek át.

3.1.3. Döntéshozó(k)

Az elnevezés több szerepkört is magában foglal az alábbiak közül:

- a döntési probléma tulajdonlása: az a személy, vagy személyek, akiknek közvetlen érdeke, hogy döntés szülessen. A döntési folyamatban betöltött szerepük és jogkörük maximális. Feladatuk:
  - a döntési feladat céljának megfogalmazása,
  - az alternatívák megadása,
  - a főszempontok meghatározása és súlyozása,
  - a döntési folyamatban résztvevő személyek kiválasztásának és azok jogosultságainak (kompetenciájának) meghatározása;
- az alternatívák értékelése az egyes szempontok szerint;
- a szempontok (de nem főszempontok) súlyainak meghatározása.

Kisméretű, vagy csak egy személyt érintő döntési feladatok esetén a felsorolt feladatok akár egyetlen személyben is megtestesülhetnek (és így nincs szükség mások jogosultságának meghatározására sem). Összetett döntési feladatoknál azonban sokkal hatékonyabb, ha a döntési folyamat fázisait felosztják, és minden egyes műveletet a hozzá leginkább értő személy végzi el, mint például a 7. fejezetben tárgyalt banki feladat esetén.

[7] Kindler szóhasználatában relevanciafa [66, 80. o.]

3.2. Súlyozási módszerek

A gyakorlatban felmerülő döntési feladatokban a szempontok általában nem egyformán fontosak. Meg kell határozni olyan mérőszámot, amely kifejezi a szempont fontosságát az adott feladatban és a döntéshozó elképzeléseivel is összhangban áll. Ezt a mérőszámot a továbbiakban szempontsúlynak vagy röviden súlynak nevezzük.

A feladat egyik nehézsége, hogy a fontosságnak nincs általánosan elfogadott mértékegysége, azt csak valamilyen skálával együtt lehet értelmezni.[8]

Axiómaként elfogadjuk a preferencia-modellezésben használt feltételt, miszerint a döntéshozó képes két dolog (ami lehet pl. a szempontok fontossága) összehasonlítására: meg tudja mondani, hogy valamelyik jobb (vagy nagyobb) a másiknál, vagy egyformák. Ezen a feltevésen alapul a legtöbb súlyozási módszer. Ezek között vannak az értekezés 4. és 5. fejezetében tárgyalt páros összehasonlítás mátrixon alapuló módszerek is.

A következőkben a szempontok súlyozásának néhány lehetőségét sorolom fel, egyet közülük vázlatosan bemutatva [66, 39-40. o.] alapján.
Jelöljük a szempontokat $C_1, C_2, \ldots, C_n$-nel, a keresendő szempontoksúlyokat pedig $w_1, w_2, \ldots, w_n$-nel.

Egyszerű közvetlen súlybecslés

Előfordul, hogy a döntéshozó közvetlenül, számszerűen meg tudja adni a szempontsúlyokat, ezt egyszerű közvetlen becslésnek is nevezi az irodalom [66]. Például, egy három szempontos feladatot tekintve, a szempontok fontosságai 50-30-20 arányban viszonyulnak egymáshoz. E módszer gyakorlati előnye, hogy könnyen és egyszerűen használható, hátránya viszont, hogy csak kis méretű feladatokban alkalmazható biztonsággal. Nagyobb méretű, összetett feladatoknál a döntéshozó(k)tól nem várható el, hogy a modellező rendelkezésére bocsássa a számszerűsített szempontsúlyokat.

A Churchman-Ackoff-féle eljárások

Churchman és Ackoff 1957-ben publikált két eljárása [21] egymást követő összehasonlításokból áll. Mindkét módszer **1. lépés**eként a szempontokat fontosságuk alapján ordinálisan (számszerű értékek használata nélkül) rendezni kell. A jelölések egyszerűsítése érdekében feltehetjük, hogy C_1 a legfontosabb szempont, C_2 a második legfontosabb és így tovább.

[8] Itt utalunk Kindler és Papp könyvének [66] 1.1. alfejezetére, amelyben a mérés- és skálaelmélet alapfogalmai szerepelnek.

I. módszer

2. lépés: C_1 szempont súlyát 1-nek tekintve meg kell adni a többi szempont relatív súlyát az elsőhöz képest. Ezek a kiindulási szempontsúlyok, amiket $1 = w_1, w_2, \ldots, w_n$ jelölnek. A becslés megbízhatóságának növelése céljából egy-egy szempontot más szempontokból álló csoportokkal hasonlítunk össze a következő kérdéspárok segítségével:

- „*a C_1 szempont fontosabb, ugyanolyan fontos vagy kevésbé fontos, mint az összes többi együttvéve?*" és ugyanez a súlyokra megfogalmazva:
- $w_1 > (=, <) w_2 + w_3 + \ldots + w_n$?

Ha C_1 szempont fontosabb, de a kiindulási súlyokkal felírt egyenlőtlenség nem ezt mutatja, akkor w_1-et úgy kell megváltoztatni (jelen esetben növelni), hogy az egyenlőtlenség tükrözze a fontosságok közötti relációt.

Ha egyformán fontosak, w_1-et úgy változtatjuk, hogy a súlyokra is egyenlőség teljesüljön és ugorjunk a 3. lépésre.

Ha C_1 szempont kevésbé fontos, akkor módosítsuk w_1 értékét úgy, hogy a súlyokkal felírt egyenlőtlenség is teljesüljön.Ezt követően hasonlítsuk össze a C_1 szempontot a $\{C_2, C_3, \ldots, C_{n-1}\}$ szempontok csoportjával és a különböző esetben a fenti szabályok szerint ismételjük meg az eljárást egészen addig, amíg a C_1 és $\{C_2, C_3\}$ összehasonlításához jutunk (ha addig egyszer sem kellett a 3. lépésre ugrani).

3. lépés: Hasonlítsuk össze C_2-t a $\{C_3, C_4, \ldots, C_n\}$ csoporttal a 2. lépésben foglaltak szerint.

4. lépés: Folytassuk az összehasonlításokat egészen addig, amíg a C_{n-2} és $\{C_{n-1}, C_n\}$ összehasonlításhoz nem jutunk.

5. lépés: Súly-normalizálás: minden szempont súlyát osszuk el $\sum_{i=1}^{n} w_i$-vel, ezáltal a végső súlyok összege 1 lesz.

A fenti leírás alapján látható, hogy a szempontok súlyát egyféle puhatolózási folyamat során lehetett pontosítani. A módszer előnye, hogy megbízhatóbb eredményt ad, mint a közvetlen súlybecslés, hátránya viszont, hogy a gyakorlatban ez sem vagy csak sok fáradság árán alkalmazható 7 szempontnál többre. Az ennél nagyobb méretű feladatokra a II. módszert javasolta Churchman és Ackoff.

II. módszer

2. lépés: Válasszunk ki tetszőlegesen egy szempontot, mondjuk C_s-t. A többi szempontot helyezzük megközelítőleg azonos nagyságú csoportokba úgy, hogy egyik csoportban se legyen 5-nél több szempont.

3. lépés: Adjuk hozzá mindegyik csoporthoz C_s-t és a hozzá tartozó w_s súlyt válasszuk 1-nek.

4. lépés: Minden csoportra végezzük el az I. módszer lépéseit.

5. lépés: Vessük össze az így kialakult súlyokkal felírt rangsort az 1. lépésben megadottal. Ha nem egyeznek meg, akkor ismételjük meg a 2.,3. és 4. lépést.

6. lépés: Ha a rangsorok megegyeznek, akkor a súlyokat 1-re normalizáljuk ugyanúgy, mint az I. módszer 5. lépésében.

Mindkét módszer a szempontok ordinális rangsorából indul ki, és kardinális, azaz számszerűsített végeredményt ad.

A Guilford-féle módszer

A Guilford [51] által definiált $n \times n$-es mátrix a következő: az (i, j)-edik $(i \neq j)$ eleme 1, ha C_i fontosabb C_j-nél és 0, ha C_j fontosabb C_i-nél. A pontosan egyenlő fontosságú szempontok esetét Guilford kizárta a vizsgálatból, ennek megfelelően a mátrix főátlójában nincsenek elemek. Az így kapott mátrix i-edik sorában szereplő 1-esek száma azt mutatja meg, hogy az i-edik szempont hány másik szempontnál volt fontosabb. A szempontsúlyok a mátrix sorösszegeinek egy lineáris transzformációja, majd a standard normális eloszlás u értékeivé történő transzformáció eredményeképpen adódnak.

Az átváltási arányok (trade-off) módszere

Ha a szempontok szerinti értékelés ugyanazon a skálán történik, akkor a szempontok összehasonlításának egy lehetséges módja az átváltási arányok (trade-off) módszere [63, 66-130. o.]. Ha a döntéshozó meg tudja mondani, hogy az egyik szempont szerinti értékelés 1 egysége hány egységgel egyenértékű a másik szempont szerinti értékelésben, akkor ebből a két szempont súlyának aránya is kikövetkeztethető.

SMART, SMARTER és LINMAP

A SMART módszerben [34] a legkevésbé fontos szempontnak van kitüntetett szerepe, ehhez kell viszonyítani a többit, a SMARTER [35] specialitása pedig, hogy csak ordinális információkat használ. A döntéshozó preferenciáinak lineáris programozással történő feltérképezésére a LINMAP eljárás szolgál.

Páros összehasonlítások arányskálán

A szempontok fontosságainak arányskálán történő összehasonlítását Saaty alkalmazta először az Analytic Hierarchy Processben [106]. A páros összehasonlítás mátrixok alapján történő súlyszámítás kérdéseire a 4. és 5. fejezetben térek vissza.

3.3. Elemi módszerek

Térjünk vissza a többszempontú döntési modellek alapfeladatához, az alternatívák rangsorolásához. Az elemi módszerek könnyen megfogalmazható megfontolásokon, heurisztikákon alapulnak. Ha ismert az alternatívák értékelése a szempontok alapján, valamilyen egyszerű elv alapján kiválasztható a legjobb, vagy legalábbis szűkíthető a vizsgálandó alternatívák halmaza. A leggyakrabban alkalmazott elvek:

- *lexikografikus:* ha ismert a szempontok fontossági sorrendje, akkor a legfontosabb szempont szerinti legjobb alternatíva lesz a győztes. Ha több ilyen is van, akkor továbblépünk a második legfontosabb szempontra és az aszerinti legjobb(ak)at választjuk. Az eljárást addig folytatjuk, amíg egyetlen alternatíva marad. Az elemi módszerek közül csak a lexikografikus esetében van szükség a szempontok fontosságára, azokra is csak ordinális értelemben.

- *dominancia-vizsgálat:* egy alternatíva dominál egy másikat, ha minden szempont szerint jobb nála. Az előbbit domináló vagy domináns, az utóbbit dominált vagy inferior alternatívának nevezzük. A döntéshozó racionalitását feltételezve a dominált alternatívák kizárhatók a további vizsgálatokból.

- *konjunktív:* minden szemponthoz meghatározva egy kielégítési szintet, csak olyan alternatívákkal foglalkozunk, amelyek minden szempont szerint megfelelnek. Itt utalunk ismét Simon kielégítő döntések elméletére.

- *diszjunktív:* keresünk egy legalább egy szempont szerint kiemelkedő teljesítménnyel rendelkező alternatívát. A más szempontokban mutatott esetleges rossz értékeknek nincs befolyásoló hatása.

- *maximin (maximum minimorum):* az alternatíváknak az egyes szempontok szerinti leggyengébb értékelését tekintve azt az alternatívát választjuk, amelyik így a legerősebb. Ez a pesszimista, vagy biztonságra törekvő döntéshozó esete. A sakkban például a maximin szabályt alkalmazzuk, hiszen egy-egy lépést [9] az ellenfél legjobb (számunkra legrosszabb) lépésére is felkészülve kell megtenni [136, 64. o.] ill. [87].

- *maximax (maximum maximorum):* az alternatívák legjobb értékelését véve alapul a legerősebbet választjuk (optimista döntéshozó esete).

Analógia a statisztikai döntéselmélet alapfeladatával

Az elemi szabályok a statisztikai döntéselmélet irodalmában is megtalálhatók. A statisztikai döntéselmélet a bizonytalanság mellett hozott döntések tudománya. Az első formalizált elmélet Wald [130] munkája, az első évtizedek eredményeit Prékopa [95] foglalta össze.
Az alapfeladat a következő: adottak az $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ cselekvési lehetőségek (alternatívák), valamint a világ lehetséges $s_1, s_2, \ldots, s_k$ állapotai és azok $p_1, p_2, \ldots, p_k$ bekövetkezési valószínűségei ($\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$), valamint az alternatíváknak az egyes állapotokhoz tartozó értékeit – melyet nevezhetünk a kifizetések vagy nyeremények hasznosságának – tartalmazó táblázat:

Világállapotok	s_1	s_2	$\ldots$	s_k
Bekövetkezési valószínűségek	p_1	p_2	$\cdots$	p_k
Alternatívák				
$\mathcal{A}_1$	c_{11}	c_{12}	$\ldots$	c_{1k}
$\mathcal{A}_2$	c_{21}	c_{22}	$\ldots$	c_{2k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\mathcal{A}_n$	c_{n1}	c_{n2}	$\ldots$	c_{nk}

[9] A játékelméletre Aumann [32, 2. kötet, 460. o.] az *interaktív döntéselmélet* elnevezést adja. A játékosok minden lépése ugyanis egy-egy döntési feladatként is értelmezhető.

Keresendő az az alternatíva, amely a döntéshozó várható hasznosságát maximalizálja. A bizonytalanság melletti feladat átfogalmazható többszempontú döntési feladattá az alábbi megfeleltetéssel:

Bizonytalanság melletti döntéshozatal		Többszempontú döntéshozatal
Cselekvési lehetőségek (alternatívák)	$\longleftrightarrow$	Alternatívák
Világállapotok (kimenetelek)	$\longleftrightarrow$	Szempontok
Világállapotok bekövetkezési valószínűsége	$\longleftrightarrow$	Szempontsúlyok
Kifizetések hasznossága	$\longleftrightarrow$	Az alternatívák szempontok szerinti értékelése

3.4. Az alternatívák szempontok szerinti értékeléseit aggregáló módszerek

Az itt szereplő módszerekben a többszempontú döntési feladat megoldása az alternatívák szempontok szerinti értékelésén, a szempontok fontosságának meghatározásán, majd az értékeléseknek a szempontsúlyokkal vett aggregálásán keresztül vezet.

- SAW (Simple Additive Weighting Method) [21];
- MAUT/MAVT (Multi Attribute Utility/Value Theory) [63];
- UTA (Utility Theory Additive) [54];
- AHP (Analytic Hierarchy Process) [106];
- SMART (Simple Multi Attribute Ranking Technic) [34]; és újabb változata, a SMARTER [35];
- TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) [53] és továbbfejlesztett változata, a BB-TOPSIS [97];
- Combinex [36, 37];
- EVAMIX (Evaluation of Mixed Criteria) [129];

- OWA-operátorok (Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators) [132] és általánosítása, a Choquet- és Sugeno-integrál [119, 86];
- WinGDSS (Windows based Group Decision Support System) [25].

A szempontok szerinti alternatíva-értékelések aggregálásának egyik legáltalánosabb módszere a súlyozott számtani közép alkalmazása. Forgó és Szidarovszky [42] megmutatta, hogy a súlyozott számtani közép előállítható n-személyes nemkooperatív játékok Nash-egyensúlyi állapotainak határértékeként.

Analógia a statisztikai döntéselmélet alapfeladatával

Az előző alfejezetben ismertetett bizonytalanság melletti feladatban, ha a kifizetéseket az $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hasznossági függvénnyel vesszük figyelembe, akkor azt az alternatívát fogjuk választani, amelynek a várható hasznossága,

$$\sum_{i=1}^{k} p_i u(c_{.i})$$

maximális. Ez a várható hasznosság elméletének alapfeladata.

3.5. Outranking rangsoroló módszerek

Az alternatívák összehasonlítására szolgáló outranking relációt Roy [101] vezette be. A módszer egy elemi lépése annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy milyen mértékben állítható egy alternatíva preferáltsága egy másikkal szemben egy-egy rögzített szempont esetében.

Minden $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ rendezett alternatívapárhoz minden szempont szerint tartozik egy preferencia-mutató (nevezzük általánosított elemi preferenciának), amely kifejezi, hogy az adott szempontból milyen mértékben teljesül $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$.

A szempontok fontosságát kifejező súlyoknak az általánosított elemi preferenciáknak az alternatívák végső rangsorrá történő aggregálásában van szerepe.

A legismertebb outranking típusú módszerek az alábbiak:

- MARSAN (Methode d'Analyse, de Recherche, et de Selection d'Activite Nouvelles) [72];

- ELECTRE (Elimination Et Choix Traduisant la Realite, Elimination and Choice Expressing the Reality) módszercsalád: ELECTRE I [100], Iv [101], IS [105], II [50, 102], III [103], IV [104], TRI [133];

- KIPA (Kindler, Papp, [66]);

- PROMETHEE (Preference Ranking Organisation Method for Enrichment Evaluations) [10, 11, 12, 14, 13];

- MELCHIOR (Method of Elimination and Choice Including Order Relation); [73]

- ORESTE [99, 91];

- REGIME [52];

- NAIADE (Novel Approach to Imprecise Assessment and Decision Environments) [85];

- MACBETH (Measuring Attractiveness by Categorical Based Technique) [3].

3.6. Interaktív módszerek

A számítástechnikai lehetőségek bővülésével olyan módszerek is kialakultak, amelyek lehetővé teszik, hogy a döntéshozó szervesen részt vegyen a döntéshozatal teljes folyamatában. A feladatot – számítógépes segítséggel – a döntéshozói igényeknek megfelelően, esetleg új információk hozzáadásával újra és újra meg lehet oldani, egészen addig, amíg nem adódik egy elfogadható eredmény. A módszerek előnye (és bizonyos szempontból hátránya is) a párbeszéd jellegük, ami a döntéshozó részéről folyamatos részvételt és figyelmet követel. A következő módszerek legjellemzőbb tulajdonsága az interaktivitás:

- STEM (Step Method) [5, 6];

- PREFCALC [55];

- TACTIC (Treatment of the Alternatives According to the Importance of Criteria) [126];

- PRIAM (Prenormative Requirements for Intelligent Actuation and Measurement) [75];

- Centrális súlyok módszere (Solymosi, Dombi [111]);

- TODIM (Tomada de Decisão Interativa Multicritério) [48];
- ELECCALC [68].

3.7. Esettanulmányok

Ebben a pontban néhány külföldi példára hivatkozok, amelyek megoldása többszempontú döntési modellekkel történt.

- az Európai Közösség energiapolitikájának hosszútávú stratégiai tervezésében 166 millió ECU szétosztását kellett megoldani a különböző, nem nukleáris energiatípusok kutatási területei között. Az alternatívák: napenergia (naperőművek); passzív napenergia (fűtés); geotermikus energia; hőszivattyúk és üzemanyagcellák; az ipari energiafelhasználás fejlesztése; szintetikus üzemanyagok, cseppfolyós szén; biomassza; szilárd üzemanyagok; szénhidrogének (olaj és gáz); szélenergia. A szempont- és értékelési rendszer kidolgozását a [78] cikk részletezi;
- Izrael energiapolitikájának többszempontú elemzése [62];
- szilárd hulladékok kezelése Athén körzetében [61];
- a holland egészségügyi rendszer stratégiai tervezése [46];
- egy amerikai egyetem doktori iskolájába jelentkezők kiválasztásának mechanizmusára kidolgozott többszempontú modell [26];
- a jordán vízellátás stratégiai tervezése [1].

4. Páros összehasonlítások a többszempontú döntési feladatokban

A 3.2. alfejezetben áttekintettem néhány, a szempontok súlyainak meghatározására szolgáló módszert, melyek közül a páros összehasonlításokon alapuló módszertanok egyikével foglalkozok részletesen ebben a fejezetben.

Condorcet [22] és Borda [9] szavazási feladataikban már az 1780-as években bevezették a *páros* (vagy páronkénti) *összehasonlítás* fogalmát, mint az egyéni preferenciák alapján felállított rangsor két eleme közötti viszonyt. A páros összehasonlítás, mint módszer alkalmazási lehetőségeit Kindler [66] történeti és módszertani áttekintése tárgyalja, melyből itt csak a csak legfontosabbakat emelem ki. A kísérleti pszichológiában először Weber és Fechner használták e fogalmat a 19. század közepén, majd az 1920-as években Thorndike [122] és Thurstone [123]. Churchman és Ackoff [21] eljárásában az elemeket először ordinális értelemben rendezni kell, ezután valamelyiket rögzítve és a többivel kardinális értelemben összehasonlítva számszerű eredmények adódnak. Guilford [51] modelljében pusztán ordinális információk alapján kardinális sorrend állapítható meg. Több döntéshozó (csoportos döntéshozatal) esetére dolgozta ki Kendall [64] a róla elnevezett egyetértési együtthatót.

A páronkénti összehasonlítások a döntéshozókkal történő elvégeztetésének fontos módszertani szempontja, hogy nem mindegy, milyen sorrendben tesszük fel a kérdéseket. A szabályos elrendezés szinte mindig torzít, a véletlenszerű már kevésbé, a Ross-féle elrendezés [98] pedig a véletlennél is kisebb torzítással működik.

A fejezet további részében a páros összehasonlítások azon változatát tárgyalom, amelyben az elemeket arányskálán hasonlítjuk össze, azaz a döntéshozótól olyan formában várjuk az elemek összehasonlítását, hogy hányszor tekinti az egyiket *jobb*nak vagy *nagyobb*nak a másiknál [106]. A páros összehasonlítás mátrix definiálása és az arra épülő legismertebb súlyozási módszerek felsorolása (4.1.) után a legkisebb négyzetes közelítés feladatát írom fel és alakítom át többváltozós polinomrendszer megoldásának problémájává (4.2.). Ezt követően a olyan eljárásokat tekintek át (4.3.), amelyek alkalmazásával többváltozós polinomrendszerek megoldhatók. Kis méretű mátrixokra a rezultáns-módszert (4.3.1-2.), a Gröbner-bázisokat (4.3.3.), valamint az általánosított rezultánsokat (4.3.4-5.), nagyobb méretre pedig a homotópiás módszert (4.3.6.) használom. Az általam alkalmazott eljárások előnye, hogy minden lokális és globális minimumhelyet megtalálnak, továbbá indulópont választására sincs szükség.

4.1. Páros összehasonlítás mátrixok

Az ebben a fejezetben tárgyalt páros összehasonlítások alkalmazására leggyakrabban *a többszempontú döntési feladatok szempontsúlyainak meghatározásakor* kerül sor, de emellett a következő feladatok megoldására is használható:

- csoportos döntési problémákban a döntéshozók szavazóerőinek (kompetencia-súlyainak) meghatározása;
- alternatívák szempontok szerinti értékelésére;
- adott szempont szerinti értékelési fokozatok (osztályzatok) számszerűsítése (pl. az AHP minősítő modelljében).

A páronként összehasonlítandó elemeket összefoglaló néven objektumoknak fogjuk nevezni. A páronkénti összehasonlításokból felépíthető egy négyzetes mátrix, melynek definíciója a következő:

Definíció. *Jelölje* $\mathbb{R}_+^{n\times n}$ *a pozitív valós elemekből álló* $n \times n$*-es mátrixok osztályát. Az*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$$

mátrixot ***páros összehasonlítás mátrix****nak nevezzük, ha minden* $i, j = 1, \dots, n$ *indexre teljesül, hogy*

$$a_{ii} = 1, \tag{1}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}. \tag{2}$$

A mátrix a_{ij} eleme azt mutatja meg, hogy a döntéshozó hányszor jobbnak ítéli meg az i-edik objektumot a j-ediknél. (1) alapján az önmagával való összehasonlítás eredménye mindig 1.
A (2) tulajdonság azon a feltételezésen alapul, hogy ha a döntéshozó számára az i-edik objektum a_{ij}-szer akkora, mint a j-edik, akkor a j-edik pontosan $\frac{1}{a_{ij}}$-szer akkora, mint az i-edik. Az (1)-(2)-ből adódóan n objektum esetén $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ összehasonlítással adható meg a mátrix.

Definíció. *Ha egy* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *mátrixra* (1)-(2)*-n túl még*

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik} \tag{3}$$

is teljesül minden $i, j, k = 1, \dots, n$ *indexre, akkor* ***konzisztens***[10] *páros összehasonlítás mátrixnak nevezzük. Az* (1)-(2) *feltételeket igen, de* (3)*-at nem teljesítő mátrixot* ***inkonzisztens*** *mátrixnak nevezzük.*

A feladat: az elemek páronkénti összehasonlításának ($\mathbf{A}$ mátrix) ismeretében a $w_1, w_2, \dots, w_n$ súlyok meghatározása, ahol

$$w_i > 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \tag{5}$$

A súlyokat együttesen a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ súlyvektorral jelöljük.

A problémára több megoldási lehetőség kínálkozik. Az Analytic Hierarchy Process (AHP) [106] módszertanban a mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó jobboldali sajátvektor komponensei adják a súlyokat. Más, távolságminimalizáló módszerekben a mátrix valamilyen célfüggvény szerinti legjobb közelítése alapján lehet a súlyokra következtetni. A legkisebb négyzetek módszere [20] és annak relaxált változatai, mint pl. a súlyozott legkisebb négyzetes [20], a logaritmikus legkisebb négyzetes [28, 24], vagy a χ^2-es [56] feladatok mellett olyan megközelítések találhatók, mint a szinguláris felbontás [45], célprogramozás [16], lineáris programozás [19].

A 2. táblázatban felsorolom a páros összehasonlítás mátrixok alapján történő legismertebb súlyozási módszereket.

Konzisztens mátrixok esetén minden egyes eljárás ugyanazt az eredményt adja. Inkonzisztens esetben a különböző módszerek által eredményezett súlyvektorok kisebb-nagyobb mértékben eltérnek. Golany és Kress [47] több szempont alapján történő összehasonlító elemzéséből kiderül, hogy minden súlyozási módszernek van előnye és hátránya, egyik sem nevezhető „a legjobb”-nak.

[10] *a (3) tulajdonság matematikailag, illetve döntési szempontból a kardinális tranzitivitásnak felel meg, ennek megfelelően szokás a mátrixot tranzitívnak is nevezni. A „konzisztens” elnevezés elsősorban döntéselméleti kontextusban használatos, a tranzitivitás ugyanis a döntéshozó következetességét, konzisztenciáját jeleníti meg.*

Módszer	A feladat	Inkonzisztencia definíciója (Az optimális megoldást $w^{(\cdot)}$ jelöli)	Hivatkozás
Sajátvektor Módszer (Eigenvector Method, EM)	$\lambda_{max}\mathbf{w} = n\mathbf{w}$	$CR = \frac{\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}}{RI_n}$, ahol RI_n a véletlen $n \times n$-es mátrixok átlagos CR értéke	Saaty [106]
Legkisebb négyzetek módszere (Least Squares, Method, LSM)	$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j}\right)^2$ $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$ $w_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} - \frac{w_i^{LSM}}{w_j^{LSM}}\right)^2$	Chu, Kalaba, Spingarn [20]
Logaritmikus legkisebb négyzetek módszere ($LLSM$)	$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\ln a_{ij} - \ln \frac{w_i}{w_j}\right)^2$ $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$ $w_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\ln a_{ij} - \ln \frac{w_i^{LLSM}}{w_j^{LLSM}}\right)^2$	Chu, Kalaba, Spingarn [20]
X^2-közelítés (Chi Squares, X^2M)	$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j}\right)^2}{\frac{w_i}{w_j}}$ $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$ $w_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(a_{ij} - \frac{w_i^{X^2M}}{w_j^{X^2M}}\right)^2}{\frac{w_i^{X^2M}}{w_j^{X^2M}}}$	Jensen [56]
Szinguláris felbontás (Singular Value Decomposition)	$\mathbf{A}_{[1]} = \alpha_1\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ az $\mathbf{A}$ mátrix Frobenius-normában legjobb 1-rangú közelítése ; $w_i^{SVD} = \frac{u_i + \frac{1}{v_i}}{\sum_{j=1}^{n}\left(u_j + \frac{1}{v_j}\right)}$ $i = 1, 2, \ldots, n$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} - \frac{w_i^{SVD}}{w_j^{SVD}}\right)^2$	Gass, Rapcsák [45]

2. táblázat *Súlyszámítási módszerek páros összehasonlítás mátrix alapján*

A többi módszerrel ellentétben a legkisebb négyzetes feladatról általában nem mondható el, hogy megoldása egyértelmű [56, 57, 40]. A célfüggvény ugyanis nem feltétlenül konvex, és az eddigiekben publikált eljárásoknál ([57], [38]) jelentős nehézséget okoz a stacionárius pontok meghatározása, mivel azok az iterációs elvű numerikus módszereket használják.

4.2. A legkisebb négyzetek módszere

Legyen adott az $\mathbf{A}$ $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Keressük azt a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n_+$ vektort, amelynek komponenseiből képzett

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & w_1/w_3 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & w_2/w_3 & \dots & w_2/w_n \\ w_3/w_1 & w_3/w_2 & 1 & \dots & w_3/w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & w_n/w_3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix Frobenius-normában a legjobban közelíti $\mathbf{A}$-t.

Az optimalizálási feladat tehát:

$$\begin{aligned} \min \| \mathbf{A} - \mathbf{X} \|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2 &, \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 &, \\ w_1, w_2, \dots, w_n > 0 &. \end{aligned} \tag{6}$$

Vezessük be az $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ új változókat a következőképpen:

$$x_1 = \frac{w_1}{w_2}, \quad x_2 = \frac{w_1}{w_3}, \quad \dots, \quad x_i = \frac{w_1}{w_{i+1}}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{w_1}{w_n}. \tag{7}$$

Ekkor

$$\frac{w_i}{w_j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j; \\ x_{j-1}, & \text{ha } i = 1 \text{ és } 1 < j \le n; \\ \frac{1}{x_{i-1}}, & \text{ha } j = 1 \text{ és } 1 < i \le n; \\ \frac{x_{j-1}}{x_{i-1}}, & \text{ha } 1 < i, j \le n, \end{cases}$$

így az $\mathbf{X}$ mátrix x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ változókkal való felírása a következő:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} \\ \frac{1}{x_1} & 1 & \frac{x_2}{x_1} & \ldots & \frac{x_{n-1}}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{x_1}{x_2} & 1 & \ldots & \frac{x_{n-1}}{x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1}} & \frac{x_1}{x_{n-1}} & \frac{x_2}{x_{n-1}} & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

és az optimalizálási feladat

$$\begin{aligned} \min \| \mathbf{A} - \mathbf{X} \|_F^2 = \ & f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} > 0 & \end{aligned} \tag{8}$$

alakban írható fel, ahol

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = & \sum_{j=2}^{n} \left[(a_{1j} - x_{j-1})^2 + \left(\frac{1}{a_{1j}} - \frac{1}{x_{j-1}} \right)^2 \right] \\ & + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left[\left(a_{ij} - \frac{x_{j-1}}{x_{i-1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{a_{ij}} - \frac{x_{i-1}}{x_{j-1}} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Mivel f nyílt tartományon értelmezett differenciálható függvény, az optimalitás elsőrendű szükséges feltétele olyan pont létezése, amelyre

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} = 0. \tag{9}$$

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltjai az $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ változók racionális törtfüggvényei, hisz maga f is az volt. Adott $i\,(1 \le i \le n-1)$ indexhez tartozó x_i változó csak az $\mathbf{X}$ mátrix $(i+1)$-edik sorában és oszlopában fordul elő, ezért az $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ parciális derivált így írható:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \left\{ (a_{i+1,1} - x_i)^2 + (a_{1,i+1} - \frac{1}{x_i})^2 + \sum\limits_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^{n} \left[\left(a_{i+1,j} - \frac{x_i}{x_{j-1}} \right)^2 + \left(a_{j,i+1} - \frac{x_{j-1}}{x_i} \right)^2 \right] \right\}}{\partial x_i},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= -2(a_{i+1,i} - x_i) + 2\left(a_{1,i+1} - \frac{1}{x_i}\right)\frac{1}{x_i^2} + \\ &+ \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^{n} \left[-2\left(a_{i+1,j} - \frac{x_i}{x_{j-1}}\right)\frac{1}{x_{j-1}} + 2\left(a_{j,i+1} - \frac{x_{j-1}}{x_i}\right)\frac{x_{j-1}}{x_i^2} \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Mivel $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ felírásában a nevezőben $x_j^2 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1,\ j \neq i)$, valamint x_i^3 szerepel, a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$-et $(x_i^3 \cdot \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} x_j{}^2)$-nel beszorozva a

$$P_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} x_i^3 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} x_j{}^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} x_i \prod_{j=1}^{n-1} x_j{}^2$$

többváltozós polinomokat kapjuk $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. A P_i polinomok közös gyökeit a

$$\begin{aligned} P_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) &= 0, \\ P_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) &= 0, \\ &\vdots \\ P_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

rendszer megoldásai adják.

A döntési feladat szempontjából csak a pozitív valós $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ gyökök érdekesek, így a (9) és (11) rendszerek egyenértékűek abban az értelemben, hogy egy pozitív valós $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ $(n-1)$-es pontosan akkor megoldása (9)-nek, ha (11)-nek is.

Ha egy $(x_1^\star, x_2^\star, \dots, x_{n-1}^\star)$ $(n-1)$-es f-nek minimumhelye, akkor szükségképpen megoldása a (11) polinomrendszernek is. Fordítva, ha a pozitív $(x_1^\star, x_2^\star, \dots, x_{n-1}^\star)$ vektor megoldása a (11) polinomrendszernek, az f Hesse-mátrix pozitív definitségének ellenőrzésével tudjuk ellenőrizni, hogy valóban (lokális) minimumhely-e. Ha igen, akkor $(x_1^\star, x_2^\star, \dots, x_{n-1}^\star)$-ból (7) és (5) alapján felírható a keresett $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ súlyvektor. Kifejezve ugyanis (7)-ből a w_i, $(i = 2, 3, \dots, n)$ súlyokat:

$$w_2 = \frac{w_1}{x_1}, \quad w_3 = \frac{w_1}{x_2}, \quad \dots, \quad w_i = \frac{w_1}{x_{i-1}}, \quad \dots, \quad w_n = \frac{w_1}{x_{n-1}},$$

majd az egyenleteket összeadva

$$\sum_{i=2}^{n} w_i = w_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i}. \tag{12}$$

(5) szerint (12) baloldali kifejezése $(1 - w_1)$-gyel egyenlő, így w_1-re

$$w_1 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j}},$$

w_i-re $(1 < i \leq n)$ pedig a (7) megfelelő $(x_{i-1} = \frac{w_1}{w_i})$ egyenletéből

$$w_i = \frac{w_1}{x_{i-1}} = \frac{\frac{1}{x_{i-1}}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j}}$$

adódik. Kaptuk tehát, hogy az LSM-optimális $\mathbf{w}$ súlyvektor a (11) polinomrendszer $(x_1^\star, x_2^\star, \dots, x_{n-1}^\star)$ megoldásából az alábbi formula szerint számolható:

$$w_1 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j^\star}}, \qquad w_i = \frac{\frac{1}{x_{i-1}^\star}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j^\star}}, \qquad i = 2, 3, \dots, n. \tag{13}$$

4.3. Polinomrendszerek megoldása

A matematikai (főleg geometriai) és fizikai-mérnöki problémák (kinetika és egyensúly) gyakran vezetnek polinomiális rendszerek megoldására, mely – mint a nemlineáris rendszerek megoldása általában – nem könnyű. Jelen fejezet áttekintést ad négy olyan módszerről, amelyek segítségével kisméretű feladatok megoldhatók. Mivel egy adott polinomrendszer összes megoldását keressük, a Newton-iteráción alapuló algoritmusokat nem tárgyalom. Megjegyzem azonban, hogy valamely polinomrendszer-megoldó algoritmus által szolgáltatott megoldás, mely szükségképpen csak közelítő megoldás lehet, a Newton-iteráció indulóértékéül választva tetszőlegesen pontosítható.

4.3.1. Rezultáns módszer

Bevezetésül idézzük fel Gauss egyik legfontosabb eredményét.

Tétel. (Az algebra alaptétele.) *Minden nemkonstans komplex $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak van gyöke a $\mathbb{C}$ számtestben.*

Legyenek f és g egyváltozós, valós együtthatós polinomok:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \\ g(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + a_m, \end{aligned}$$

ahol $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Az algebra alaptételéből következően f és g felírhatók gyöktényezős szorzatalakban:

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i), \tag{14}$$

$$g(x) = b_0 \prod_{j=1}^{m} (x - \beta_j), \tag{15}$$

ahol $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$

Definíció. *Az f és g polinomok $R(f, g)$-vel jelölt **rezultánsa***

$$R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j).$$

(15) alapján

$$g(\alpha_i) = b_0 \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j),$$

és hasonlóan,

$$R(f, g) = a_0^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i).$$

A definícióból következik, hogy f-nek és g-nek pontosan akkor van közös gyöke $\mathbb{C}$-ben, ha $R(f, g) = 0$. Megjegyezzük, hogy a rezultáns definíciója nem szimmetrikus az argumentumokra nézve, igaz viszont, hogy

$$R(g, f) = b_0^n a_0^m \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} (\beta_j - \alpha_i) = (-1)^{nm} R(f, g).$$

$R(g, f)$ egy másik alakban történő felírása:

$$R(g, f) = b_0^n \prod_{j=1}^{m} f(\beta_j).$$

Az alábbi tétel [70] szerint $R(f, g)$ nemcsak f és g gyökeiből, hanem közvetlenül az együtthatókból is számolható.

Tétel. *Jelölje D a következő (Sylvester-féle) mátrix determinánsát:*

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & a_2 & & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & b_2 & & \dots & b_m \end{vmatrix}_{(n+m)\times(n+m)},$$

ahol az üresen hagyott elemek 0-kat jelentenek. Ekkor

$$D = R(f, g).$$

Példa. *Legyenek f és g*

$$f(x) = x^2 - 5x - 14,$$
$$g(x) = x^2 - 6x - 7.$$

Az előző tétel szerint

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -14 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -14 \\ 1 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -7 \end{vmatrix} = 0,$$

tehát f és g-nek kell, hogy legyen közös gyöke ($x = 7$ valóban az). Mindezt anélkül kaptuk, hogy ki kellett volna számítanunk f és g gyökeit.

Legyen most adott a következő egyenletrendszer:

$$f(x,y) = 0, \tag{16}$$
$$g(x,y) = 0, \tag{17}$$

ahol $f, g \in \mathbb{R}[x,y]$ kétváltozós, valós együtthatós polinomok. Ha csak x-et tekintjük változónak, y-t pedig paraméternek, akkor az f-ben és g-ben, mint egyváltozós polinomokban szereplő tagok sorbarendezhetők x kitevőjének nagysága szerint:

$$f(x,y) = a_0(y)x^k + a_1(y)x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}(y)x + a_k(y), \tag{18}$$
$$g(x,y) = b_0(y)x^l + b_1(y)x^{l-1} + \ldots + b_{l-1}(y)x + a_l(y), \tag{19}$$

ahol $a_0(y), a_1(y), \ldots, a_k(y), b_0(y), b_1(y), \ldots, b_l(y) \in \mathbb{R}[y]$ valós együtthatós egyváltozós polinomjai y-nak. Felírható tehát $R_x(f,g)$, mint az f és g egyváltozós polinomok rezultánsa:

$$R_x(f,g) = \begin{vmatrix} a_0(y) & a_1(y) & a_2(y) & \ldots & a_k(y) & & & \\ & a_0(y) & a_1(y) & \ldots & a_{k-1}(y) & a_k(y) & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0(y) & a_1(y) & a_2(y) & \ldots & a_k(y) \\ b_0(y) & b_1(y) & b_2(y) & \ldots & b_l(y) & & & \\ & b_0(y) & b_1(y) & \ldots & b_{l-1}(y) & b_l(y) & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0(y) & b_1(y) & b_2(y) & \ldots & b_l(y) \end{vmatrix} = P(y),$$

ahol $P(y) \in \mathbb{R}[y]$ valós együtthatós egyváltozós polinomja y-nak.

Tegyük fel, hogy az $x = \alpha$, $y = \beta$ megoldása a (16)-(17) rendszernek. Behelyettesítve $y = \beta$-t (18)-(19)-be, az $f(x,\beta)$ és $g(x,\beta)$ egyváltozós polinomokat kapjuk, melyek közös gyöke α. Ha az $a_0(\beta), b_0(\beta)$ főegyütthatók nem nullák, akkor az $f(x,\beta)$ és $g(x,\beta)$ polinomok rezultánsa az alábbiak szerint írható fel:

$$R(f(x,\beta),g(x,\beta)) = \begin{vmatrix} a_0(\beta) & a_1(\beta) & a_2(\beta) & \dots & a_k(\beta) & & & \\ & a_0(\beta) & a_1(\beta) & \dots & a_{k-1}(\beta) & a_k(\beta) & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0(\beta) & a_1(\beta) & a_2(\beta) & \dots & a_k(\beta) \\ b_0(\beta) & b_1(\beta) & b_2(\beta) & \dots & b_l(\beta) & & & \\ & b_0(\beta) & b_1(\beta) & \dots & b_{l-1}(\beta) & b_l(\beta) & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0(\beta) & b_1(\beta) & b_2(\beta) & \dots & b_l(\beta) \end{vmatrix},$$

mely rezultánst kifejtve β-nak egy $P(\beta)$ polinomját kapjuk. Mivel α közös gyöke $f(x,\beta)$ és $g(x,\beta)$-nak, azt kaptuk, hogy $P(\beta) = 0$, azaz β gyöke a P-nek.

Másfelől, tegyük fel, hogy $P(y) = R_x(f,g)$ polinomnak gyöke az $y = \beta$. Ha az $a_0(\beta)$ és $b_0(\beta)$ főegyütthatók nem nullák, akkor $P(\beta) = R(f(x,\beta),g(x,\beta))$. De $P(\beta) = 0$, így $f(x,\beta)$-nak és $g(x,\beta)$-nak szükségképpen van közös gyöke.

4.3.2. A 3×3 LSM feladat megoldása

Ebben az alfejezetben a rezultáns-módszer alkalmazhatóságát mutatom be a 3×3-as páros összehasonlítás mátrixok LSM-becslésének kiszámítására. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ \frac{1}{a} & 1 & c \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}.$$

Keressük azt az $\mathbf{X}$ konzisztens páros összehasonlítás mátrixot,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \frac{w_2}{w_3} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & 1 \end{pmatrix},$$

amely Frobenius-normában legjobban közelíti $\mathbf{A}$-t, azaz minimalizálja az

$$\| \mathbf{A} - \mathbf{X} \|_F^2 = \left(a - \frac{w_1}{w_2}\right)^2 + \left(b - \frac{w_1}{w_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{w_2}{w_1}\right)^2 + \left(c - \frac{w_2}{w_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{w_3}{w_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{w_3}{w_2}\right)^2$$

függvényt, ahol $w_1, w_2, w_3 > 0$. Bevezetve az x, y új változókat,

$$\begin{aligned} x &= \frac{w_1}{w_2} \\ y &= \frac{w_1}{w_3}, \end{aligned}$$

az $\mathbf{X}$ mátrix így írható:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ \frac{1}{x} & 1 & \frac{y}{x} \\ \frac{1}{y} & \frac{x}{y} & 1 \end{pmatrix},$$

ahol $x, y > 0$. Ebben a felírásban már csak két változó szerepel, a korábbi hárommal szemben. Legyen $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \| \mathbf{A} - \mathbf{X} \|_F^2 = (a-x)^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right)^2 + (b-y)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(c - \frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{x}{y}\right)^2,$$

így az optimalizálási feladat az alábbi:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x,y) \\ & x, y > 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Az optimalitás elsőrendű feltételei szerint $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
Az f függvény elsőrendű parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2\left(x + \frac{x}{y^2} + \frac{cy}{x^2} - \frac{y^2}{x^3} - \frac{1}{cy} + \frac{1}{a\,x^2} - \frac{1}{x^3} - a\right), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2\left(y - \frac{x^2}{y^3} + \frac{x}{c\,y^2} - \frac{c}{x} + \frac{y}{x^2} + \frac{1}{b\,y^2} - \frac{1}{y^3} - b\right). \end{aligned}$$

2-vel leosztva és $\frac{\partial f}{\partial x}$-et x^3y^2-nel, illetve $\frac{\partial f}{\partial y}$-t x^2y^3-nel beszorozva a $p(x,y)$ és $q(x,y)$ kétváltozós polinomokhoz jutunk:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= x^4y^2 - ax^3y^2 + x^4 - \frac{1}{c}x^3y + cxy^3 - y^4 + \frac{1}{a}xy^2 - y^2, \\ q(x,y) &= x^2y^4 - bx^2y^3 - x^4 + \frac{1}{c}x^3y - cxy^3 + y^4 + \frac{1}{b}x^2y - x^2. \end{aligned}$$

Keressük tehát az alábbi rendszer $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ megoldása(i)t:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= 0, \\ q(x, y) &= 0, \\ x, y &> 0. \end{aligned} \tag{21}$$

A rezultáns módszer alkalmazásához tekintsük p-t és q-t, mint x-nek egyváltozós polinomjait, az y-os tényezőket olvasszuk be az együtthatókba.

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \left(y^2+1\right)x^4 + \left(-ay^2 - \frac{1}{c}y\right)x^3 + \left(cy^3 + \frac{1}{a}y^2\right)x - y^4 - y^2 \\ q(x, y) &= -x^4 + \frac{1}{c}yx^3 + \left(y^4 - by^3 + \frac{1}{b}y - 1\right)x^2 - cy^3x + y^4. \end{aligned}$$

$R_x(p, q)$ a következő mátrix determinánsaként számítható ki:

$$\begin{pmatrix} y^2+1 & -ay^2-\frac{1}{c}y & 0 & cy^3+\frac{1}{a}y^2 & -y^4-y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^2+1 & -ay^2-\frac{1}{c}y & 0 & cy^3+\frac{1}{a}y^2 & -y^4-y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y^2+1 & -ay^2-\frac{1}{c}y & 0 & cy^3+\frac{1}{a}y^2 & -y^4-y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y^2+1 & -ay^2-\frac{1}{c}y & 0 & cy^3+\frac{1}{a}y^2 & -y^4-y^2 \\ -1 & \frac{1}{c}y & y^4-by^3+\frac{1}{b}y-1 & -cy^3 & y^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{c}y & y^4-by^3+\frac{1}{b}y-1 & -cy^3 & y^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{c}y & y^4-by^3+\frac{1}{b}y-1 & -cy^3 & y^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{c}y & y^4-by^3+\frac{1}{b}y-1 & -cy^3 & y^4 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

ami y-nak egy 28-adfokú $P(y)$ polinomja, amelyből y^4 kiemelhető, így elegendő egy 24-edfokú polinom pozitív valós gyökeit megkeresnünk. A feladat könnyen és numerikusan stabil módon megoldható pl. a Maple szoftver segítségével.

Tegyük fel, hogy megtaláltuk P összes pozitív valós gyökét, jelölje ezeket $y_1, y_2, \ldots, y_t$, ahol $1 \leq t \leq 24$. Ha ezeket az y_i, $(i = 1, \ldots, t)$ gyököket visszahelyettesítjük a $p(x, y)$ és $q(x, y)$ polinomokba, x-nek 4-edfokú polinomjait kapjuk. A főegyütthatók sosem lesznek nullák, ugyanis eleve csak a pozitív valós y_i, $(i = 1, \ldots, t)$ megoldásokkal foglalkozunk. A negyedfokú polinomok pozitív valós gyökeinek kiszámítása után könnyű leellenőrizni, hogy p és q valóban rendelkezik-e közös gyökkel.

Tegyük fel, hogy $(x^\star, y^\star)$ közös gyöke, azaz megoldása (21)-nek. Hogy meggyőződjünk $(x^\star, y^\star)$ minimumhely voltáról, f második deriváltját kell megvizsgálnunk. Ez a Hesse-mátrix a következőképpen írható fel:

$$\begin{pmatrix} -\frac{4cy}{x^3}+\frac{6y^2}{x^4}+\frac{2}{y^2}-\frac{4}{ax^3}+\frac{6}{x^4}+2 & -\frac{4x}{y^3}+\frac{2c}{x^2}-\frac{4y}{x^3}+\frac{2}{cy^2} \\ -\frac{4x}{y^3}+\frac{2c}{x^2}-\frac{4y}{x^3}+\frac{2}{cy^2} & \frac{6x^2}{y^4}-\frac{4x}{cy^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{by^3}+\frac{6}{y^4}+2 \end{pmatrix}.$$

Ha a Hesse-mátrix pozitív definit az $(x^\star, y^\star)$ pontban, akkor $(x^\star, y^\star)$ szigorú lokális minimumhely. Ezzel megmutattam az alábbi tételt:

Tétel. (Bozóki, [S-1]) *Egy* 3×3*-as mátrixra felírt* (20) *LSM feladat összes megoldása előállítható a* (22) *képlettel megadott, legfeljebb 24-edfokú egyváltozós polinom pozitív valós gyökeiből. Az algoritmus mindkét lépése, a polinomrendszer felírása a páros összehasonlítás mátrix elemei alapján és az egyváltozós polinom valós gyökeinek előállítása numerikusan stabil.*

Két példán keresztül mutatom be a kétváltozós polinomrendszer geometriai tartalmát. Első páros összehasonlítás mátrixunk legyen az alábbi:

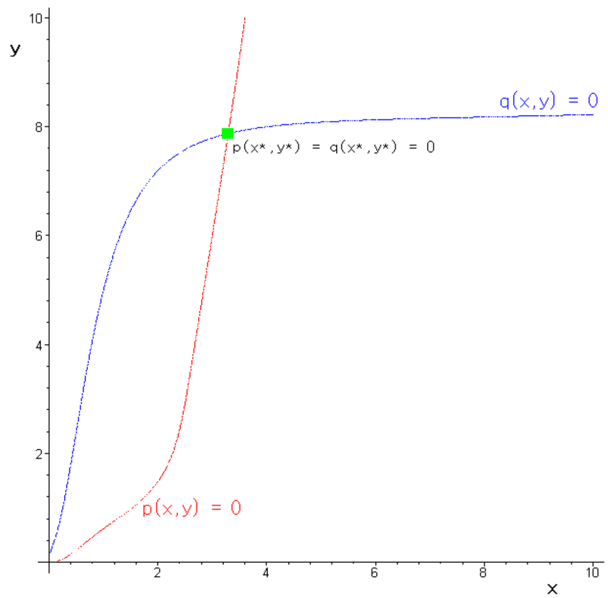
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}.$$

A legkisebb négyzetes célfüggvény parciális deriváltjaiból származtatott $p(x, y)$ és $q(x, y)$ kétváltozós polinomok zérushelyeinek halmaza egy-egy görbe (1. ábra), melyeknek egyetlen metszéspontja az $(x^\star, y^\star)$ pont, amelyre $p(x^\star, y^\star) = q(x^\star, y^\star) = 0$. Számítással ellenőrizhető, hogy $(x^\star, y^\star)$ pontban a célfüggvény Hesse-mátrixa pozitív definit, így valóban minimumhelyet kaptunk.

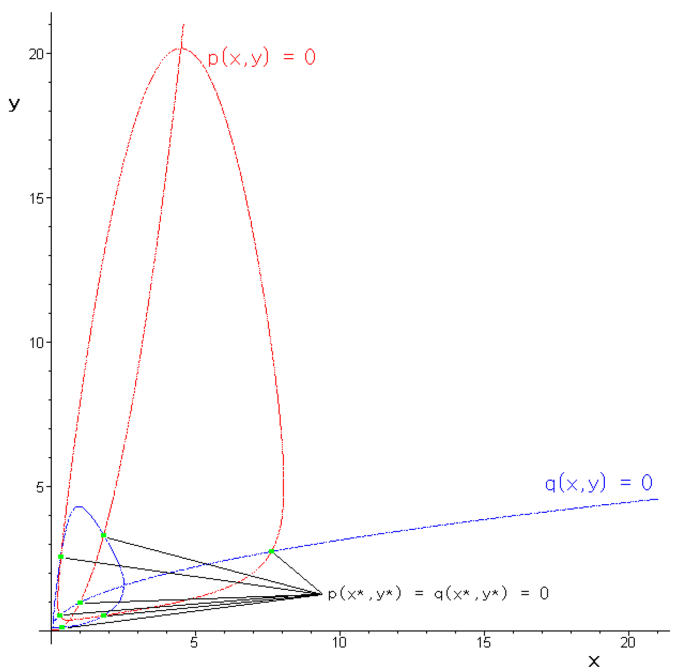
Második példánkban legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 1 & 9 \\ 9 & \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix}.$$

A parciális deriváltak eltűnését biztosító $p(x, y)$ és $q(x, y)$ kétváltozós polinomok zérushelyeinek halmaza lényegesen bonyolultabb, önmagukat többször átmetsző görbéket ad (2. ábra), amelyek 7 pontban metszik egymást. Ez a mátrix még későbbi vizsgálataimban is szerepelni fog, itt csak annyit jegyzek meg, hogy a 7 pontból 3 lesz lokális (és globális) minimumhely.



1. ábra 3 × 3-*as mátrix alapján felírt kétváltozós polinomrendszer megoldása (egy gyök esete)*



2. ábra 3 × 3-*as mátrix alapján felírt kétváltozós polinomrendszer megoldása (több gyök esete)*

4.3.3. Gröbner-bázisok

A polinomgyűrűk és ideálok tanulmányozására vezette be Buchberger [17] a Gröbner-bázis fogalmát, mely elnevezést Ph.D. témavezetője iránti tisztelete jeléül választotta.

Egy adott polinomrendszerhez tartozó Gröbner-bázis egy az eredetivel ekvivalens rendszer, azaz pontosan ugyanazok a gyökei, mint az eredetinek. A Gröbner-bázisbeli polinomrendszer azonban rendelkezik bizonyos tulajdonságokkal is, melyek jól használhatók a polinomokkal való osztás és egyéb vizsgálatok során. A Maple szoftverben írt programjaim futási eredményei azt mutatják, hogy a 3×3-as páros összehasonlítás mátrixokból kapott polinomrendszerre még működik az algoritmus és a rezultáns módszerhez hasonlóan 24-edfokú egyváltozós polinom pozitív valós gyökeinek megkeresésére redukálható a feladat, nagyobb méretekre azonban memória-túlcsordulás miatt leáll.

4.3.4. Az általánosított rezultánsok

A 4.3.2. fejezetben láttuk a rezultáns alkalmazását kétváltozós, két egyenletes polinomrendszerek megoldására. A továbbiakban egy általánosabb módszert ismertetek a polinomiális rendszerek megoldására. Az eljárás bemutatására azért itt kerül sor, mert számítási tapasztalataink szerint a 4×4-es a legnagyobb méret, amelyre a páros összehasonlítás mátrixok LSM-közelítése az általánosított rezultánsok elméletén alapuló algoritmussal megoldható.

A Bezout-Dixon-Kapur-Saxena-Yang módszer

Definíció. *Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változókból képzett **monóm** az ${x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \cdots {x_n}^{\alpha_n}$ szorzat, ahol az $\alpha_i, (i = 1, 2, \ldots, n)$ kitevők nemnegatív egész számok. Az $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ összeget a monóm **teljes fokának** nevezzük.*

Tekintsünk egy n ismeretlenből $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és m paraméterből $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ álló $n+1$-egyenletes polinomrendszert:

$$
\begin{gathered}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0, \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0, \\
\vdots \\
f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0.
\end{gathered}
$$

A változók eliminálásával olyan kifejezést (rezultánst) keresünk, amely a $a_1, a_2, \ldots, a_m$ paraméterek polinomiális függvénye, és amely pontosan akkor 0, ha a polinomiális egyenletrendszernek van megoldása (közös gyöke).

Speciális esetként tekintsünk egy egyváltozós, két egyenletből álló rendszert:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \\ g(x) &= 0, \end{aligned} \tag{23}$$

ahol $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Legyen t egy új változó és tekintsük az alábbi függvényt:

$$\delta(x,t) = \frac{1}{x-t} \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(t) & g(t) \end{vmatrix}.$$

Ez könnyen láthatóan egy szimmetrikus polinom az x, t változókban. Vegyük észre, hogy ha x_0 közös gyöke f-nek és g-nek, akkor $\delta(x_0, t)$ azonosan 0 minden t-re.
Legyen $d = \max\{deg(f), deg(g)\} - 1$. Ekkor $\delta(x,t)$ x-beli és t-beli foka is legfeljebb d, sőt, kivéve ha az f és g lineárisan függetlenek, pontosan d.

Írjuk fel most $\delta(x,t)$-t, mint a t változó $\mathbb{R}[x]$-beli együtthatókkal vett polinomját:

$$\delta(t,x) = (Ax^d + \cdots + F)t^d + (Bx^d + \cdots + G)t^{d-1} + \cdots + (Sx^d + \cdots + W)t^0,$$

ahol $A, B, \ldots$ $\mathbb{R}$-beli elemek. Az x_0 közös gyök esetén $\delta(x_0, t)$ azonosan 0 minden t-re, tehát együtthatónként is azonosan 0. Ez az egyenletrendszer mátrixos alakba rendezve a következő:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A & \cdots & \cdots & F \\ B & \cdots & \cdots & G \\ & \cdots & \cdots & \\ S & \cdots & \cdots & W \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} x^d \\ \cdots \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \tag{24}$$

ahol $\mathbf{M}$ jelöli a baloldalon levő négyzetes mátrixot. Ha ezt a lineáris egyenletrendszert a $\{v_d, v_{d-1}, \ldots, v_0\}$ változókban írjuk fel:

$$\begin{bmatrix} A & \cdots & \cdots & F \\ B & \cdots & \cdots & G \\ & \cdots & \cdots & \\ S & \cdots & \cdots & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d \\ \cdots \\ v_1 \\ v_0 \end{bmatrix} = 0,$$

akkor a $v_0 = 1,\ v_k = {x_0}^k{}_{k=1,2,\ldots,d}$ választással egy nemtriviális megoldáshoz jutunk, $\mathbf{M}$ determinánsa tehát szükségképpen 0. Az $\mathbf{M}$ mátrix determinánsát az általános esetet előrevetítendő Dixon-rezultáns rövidítése alapján DR-rel jelöljük. Igaz tehát az alábbi tétel:

Tétel. *A (24) egyenlet $\mathbf{M}$ együtthatómátrixának DR-rel jelölt determinánsának nullává válása szükséges feltétele az (23) rendszer megoldhatóságának, azaz ha f-nek és g-nek van közös gyöke, akkor $DR = 0$.*

Példa. *Legyenek*

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+a-1)(a+3)(x-a), \\ g(x) &= (x+3a)(x+a). \end{aligned}$$

Ekkor $DR = 8a^2(2a+1)(a+3)^2$. A $DR = 0$ egyenlet megoldásai pedig $a = -\frac{1}{2}, -3, -3, 0, 0$. Ez szükséges (de nem elégséges) feltétele a közös gyök létezésének. Az egyes értékeket behelyettesítve és ellenőrizve kapjuk, hogy a megoldások:

$$(a=-3, x=9), \quad (a=-3, x=3), \quad (a=0, x=0), \quad (a=-\frac{1}{2}, x=\frac{3}{2}).$$

A fenti ötletet Dixon [29] általánosította $n+1$ egyenlet és n ismeretlen esetére. Egy kis példán keresztül ismertetem az eljárást. Legyen a három egyenletből és két ismeretlenből álló rendszerünk az alábbi:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0, \\ g(x,y) &= 0, \\ h(x,y) &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Kibővítve az s, t új változókkal, definiáljuk a

$$\delta(x,y,s,t) = \frac{1}{(x-s)(y-t)} \begin{vmatrix} f(x,y) & g(x,y) & h(x,y) \\ f(s,y) & g(s,y) & h(s,y) \\ f(s,t) & g(s,t) & h(s,t) \end{vmatrix}$$

kifejezést, mely polinomja (x,s)-nek csakúgy, mint (y,t)-nek, de nem feltétlenül szimmetrikus bennük. Az egyváltozós esethez hasonlóan δ felírható, mint az s-ből és t-ből képzett monómok $\mathbb{R}[x,y]$-beli együtthatókkal vett összege:

$$\delta = (Ax^{d_1}y^{d_2} + \cdots + F)s^{e_1}t^{e_2} + \cdots + (Bx^{d_1}y^{d_2} + \cdots + G)s^i t^j + \cdots$$

Nem könnyű előre megmondani d_1, d_2, e_1 és e_2 pontos értékét. d_1 a δ-ban szereplő legnagyobb kitevője x-nek, e_1 pedig az s legnagyobb kitevője, stb. Az együtthatók 0-val való egyezőségét az alábbi mátrixegyenlet írja le:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A & \cdots & & \cdots & F \\ & \cdots & & \cdots & \\ B & \cdots & & \cdots & G \\ & \cdots & & \cdots & \\ & \cdots & & \cdots & \\ & \cdots & & \cdots & \\ & \cdots & & \cdots & \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} x^{d_1}y^{d_2} \\ \cdots \\ y \\ x^{d_1} \\ \cdots \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \qquad (26)$$

Ebben az esetben az $\mathbf{M}$ mátrix nem feltétlenül négyzetes. Ha viszont négyzetes, akkor determinánsát DR-rel jelölve, a $DR = 0$ szükséges feltétele a közös gyök(ök) létezésének.
A többváltozós polinomok egy speciális osztályáról többet is mondhatunk.

Definíció. *Egy $p \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomot **generikus polinom**nak nevezünk, ha felírásában az összes lehetséges monóm előfordul és az együtthatóik algebrailag függetlenek $\mathbb{Q}$ felett.*

Tétel. (Dixon, [29]): *Ha a $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ polinomok mindegyike generikus, akkor a Dixon-rezultáns eltűnése szükséges és elégséges feltétele a közös gyök létezésének.*

Gyakorlati feladatok esetén legtöbbször kevés paraméter szerepel, így a Dixon-tétel feltételei nem is teljesülhetnek. Ugyancsak gyakorlati tapasztalat, hogy az $\mathbf{M}$ mátrix gyakran tartalmazhat csupa nullákból álló sorokat vagy oszlopokat, a determináns tehát (ha $\mathbf{M}$ egyáltalán négyzetes) azonosan nulla. A következő tétel segítségével azonban mégis lehetőség nyílik a közös zérushely(ek) létezésének ellenőrzésére.

Tétel. (Kapur, Saxena, Yang [60]): *Legyen DR az* (26) *egyenletrendszer* $\mathbf{M}$ *együtthatómátrixának egy tetszőleges maximális rangú részmátrixának determinánsa. Bizonyos technikai feltételek mellett ekkor a $DR = 0$ szükséges feltétele a* (25) *rendszer megoldhatóságának, azaz az f, g és h polinomok közös gyöke(i)nek létezésének.*

A technikai feltételek [60] gyakorlati szempontból ugyan megint nehezen ellenőrizhetők, sőt legtöbbször nem is teljesülnek, azonban Buse, Elkadi és Mourrain [18] megmutatták, hogy bizonyos esetekben elegendő csak az $\mathbf{M}$ mátrix egy maximális rangú részmátrixából kapott determinánsára a $DR = 0$ feltételt ellenőrizni.

A fenti elméleti eredményeket most arra a speciális esetre alkalmazzuk, amikor adott n egyenletünk és n változónk:

$$\begin{aligned}
p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0,\\
p_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0,\\
&\vdots\\
p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0.
\end{aligned}$$

Tekintsük az egyik változót, például x_1-et paraméternek. Ekkor a Dixon-rezultánst az x_1-nek egy egyváltozós polinomját eredményezi. A polinomrendszer közös gyökhelyének megkeresése így egy egyváltozós polinom gyökeinek megkeresésére redukálódott. A feladat ezzel még általában nincs megoldva, de mindenesetre 1-gyel sikerült csökkenteni a változós számát, s így a probléma méretét.

4.3.5. 4×4-es mátrixok LSM megoldása

Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ \frac{1}{a_{13}} & \frac{1}{a_{23}} & 1 & a_{34} \\ \frac{1}{a_{14}} & \frac{1}{a_{24}} & \frac{1}{a_{34}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Keressük azt az $\mathbf{X}$ konzisztens páros összehasonlítás mátrixot,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} & \frac{w_1}{w_4} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \frac{w_2}{w_3} & \frac{w_2}{w_4} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & 1 & \frac{w_3}{w_4} \\ \frac{w_4}{w_1} & \frac{w_4}{w_2} & \frac{w_4}{w_3} & 1 \end{pmatrix},$$

amely Frobenius-normában legjobban közelíti $\mathbf{A}$-t, azaz minimalizálja az $\| \mathbf{A} - \mathbf{X} \|_F^2$ függvényt a súlyok normalizálásának és pozitivitásának feltételei mellett:

$$\begin{aligned} \min \| \mathbf{A} - \mathbf{X} \|_F^2 \\ \sum_{i=1}^{3} w_i = 1 \\ w_1, w_2, w_3 > 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Az

$$\begin{aligned} x &= \frac{w_1}{w_2}, \\ y &= \frac{w_1}{w_3}, \\ z &= \frac{w_1}{w_4} \end{aligned} \tag{28}$$

új változók bevezetésével felírt $\| \mathbf{A} - \mathbf{X} \|_F^2$ célfüggvény

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = \| \mathbf{A} - \mathbf{X} \|_F^2 = (a_{12} - x)^2 + \left(\frac{1}{a_{12}} - \frac{1}{x} \right)^2 + (a_{13} - y)^2 + \left(\frac{1}{a_{13}} - \frac{1}{y} \right)^2 \\ + (a_{14} - z)^2 + \left(\frac{1}{a_{14}} - \frac{1}{z} \right)^2 + \left(a_{23} - \frac{y}{x} \right)^2 + \left(\frac{1}{a_{23}} - \frac{x}{y} \right)^2 \\ + \left(a_{24} - \frac{z}{x} \right)^2 + \left(\frac{1}{a_{24}} - \frac{x}{z} \right)^2 + \left(a_{34} - \frac{z}{y} \right)^2 + \left(\frac{1}{a_{34}} - \frac{y}{z} \right)^2 \end{aligned}$$

alakban írható fel. A $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ parciális deriváltak átalakításából az alábbi polinomrendszer adódik:

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= x^4y^2z^2 - a_{12}x^3y^2z^2 + x^4y^2 + x^4z^2 - \frac{1}{a_{24}}x^3y^2z - \frac{1}{a_{23}}x^3yz^2 \\ &\quad + a_{23}xy^3z^2 + a_{24}xy^2z^3 - y^4z^2 - y^2z^4 + \frac{1}{a_{12}}xy^2z^2 - y^2z^2, \\ q(x,y,z) &= x^2y^4z^2 - a_{13}x^2y^3z^2 - x^4z^2 + \frac{1}{a_{23}}x^3yz^2 + x^2y^4 \\ &\quad - \frac{1}{a_{34}}x^2y^3z + a_{34}x^2yz^3 - x^2z^4 - a_{23}xy^3z^2 + y^4z^2 + \frac{1}{a_{13}}x^2yz^2 - x^2z^2, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r(x,y,z) = {} & x^2y^2z^4 - a_{14}x^2y^2z^3 - x^4y^2 + \frac{1}{a_{24}}x^3y^2z - x^2y^4 \\
& + \frac{1}{a_{34}}x^2y^3z - a_{34}x^2yz^3 + x^2z^4 - a_{24}xy^2z^3 + y^2z^4 + \frac{1}{a_{14}}x^2y^2z - x^2y^2.
\end{aligned}
$$

Keressük az alábbi 3 változós, 3 egyenletes polinomrendszer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+$ megoldása(i)t:

$$
\begin{aligned}
p(x,y,z) &= 0, \\
q(x,y,z) &= 0, \\
r(x,y,z) &= 0.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

A Lewis [76] által létrehozott *Fermat* computer algebra programcsomaggal – melyet kifejezetten nagyméretű polinomiális és mátrix-számításokra tervezett – sikerült megoldani a (29) rendszert.

Az alábbiakban felsorolásszerűen a polinomiális rendszerek gyakorlati megoldásának jellegzetességeit, illetve néhány technikai nehézséget, amelyeket át kellett hidalni. Részletesebb ismertetés olvasható az [S-2] cikkben.

- A polinomrendszerből számított $\mathbf{M}$ mátrix egy maximális rangú $\mathbf{M}_2$ részmátrixa viszonylag könnyen előállítható a Fermat szoftver beépített Pseudet parancsával. Jelöljük a korábbiaknak megfelelően DR-rel az $\mathbf{M}_2$ mátrix determinánsát.
- Tapasztalataink alapján a DR polinom felírásában többmillió tag is szerepelhet, amely nemcsak a számítást lassítja le, hanem esetleg el sem fér a számítógép memóriájában. DR tehát túl nagy, míg ennek egy irreducibilis faktora, a lényegi információkat ugyanúgy tartalmazó rezultáns pedig néhány száz tag összegeként is előáll.
- Több maximális rangú részmátrix determinánsát kiszámolva, majd ezek legnagyobb közös osztóját véve jelentős méretcsökkenés érhető el.
- Bizonyos esetekben elegendő modulo $\mathbb{Z}_p$ dolgozni, ahol p prím.
- Az egyes paraméterek helyére konkrét számokat behelyettesítve a szimbolikus számítás nagy tár- és időigénye mérsékelhető.
- Lewis gyakorlati számításai során észrevette, hogy alkalmas technikával az $\mathbf{M}_2$ mátrixból közvetlenül leolvasható azon polinomok listája,

amelyek szorzata DR lesz, és a lista utolsó eleme épp a keresendő irreducibilis rezultáns.

A 4×4-es mátrixok LSM-approximációjából származó 3 egyenletből álló 3 ismeretlenes polinomrendszer a Fermat szoftver segítségével megoldható. A kapott egyváltozós polinom foka 26 és 137 között változik, az adott mátrix elemeinek függvényében. Ezen egyváltozós polinom pozitív valós gyökeinek megkeresésére a Maple program megnyugtató eredményt ad. Az eddigi tapasztalatok alapján a pozitív valós gyökök száma 1 és 10 között mozog. Ez lehetőséget ad arra, hogy visszahelyettesítéssel az eredeti 3 egyenletből álló 3 ismeretlenes polinomrendszer 3 egyenletből álló 2 ismeretlenes polinomrendszerre redukálódjon. A 3 egyenletből egyszerre csak kettőt tudunk megoldani a 4.3.2. fejezetben ismertetett technikával, viszont képezve a 3 lehetséges egyenletpár megoldásainak metszetét az eredeti polinomrendszer közös gyökei immáron rendelkezésünkre állnak.

Tegyük fel tehát, hogy (x, y, z) számhármas megoldása a (29) rendszernek. Ha a második derivált, azaz a Hesse-mátrix pozitív definit e pontban, akkor (x, y, z) lokális minimumhely, amelyből az LSM-optimális súlyvektor (27)-(28) alapján az alábbiak szerint képezhető:

$$w_1 = \frac{xyz}{xyz + xy + xz + yz}, \qquad w_2 = \frac{yz}{xyz + xy + xz + yz},$$

$$w_3 = \frac{xz}{xyz + xy + xz + yz}, \qquad w_4 = \frac{xy}{xyz + xy + xz + yz}.$$

Eredményünket az alábbiak szerint foglalhatjuk össze:

Tétel. (Bozóki, Lewis [S-2]) *Egy 4×4-es mátrixra felírt* (27) LSM *feladat összes megoldása előállítható egy legfeljebb 137-edfokú egyváltozós polinom pozitív valós gyökeiből. A polinom együtthatói szimbolikusan, tehát számítási hiba nélkül felírhatók a Fermat szoftver segítségével, a valós gyökök előállítása pedig numerikusan stabil algoritmussal történik.*

A 4×4-es mátrixokhoz tartozó 3 változós polinomrendszerek is szemléltethetők geometriailag. Tekintsük a következő páros összehasonlítás mátrixot:

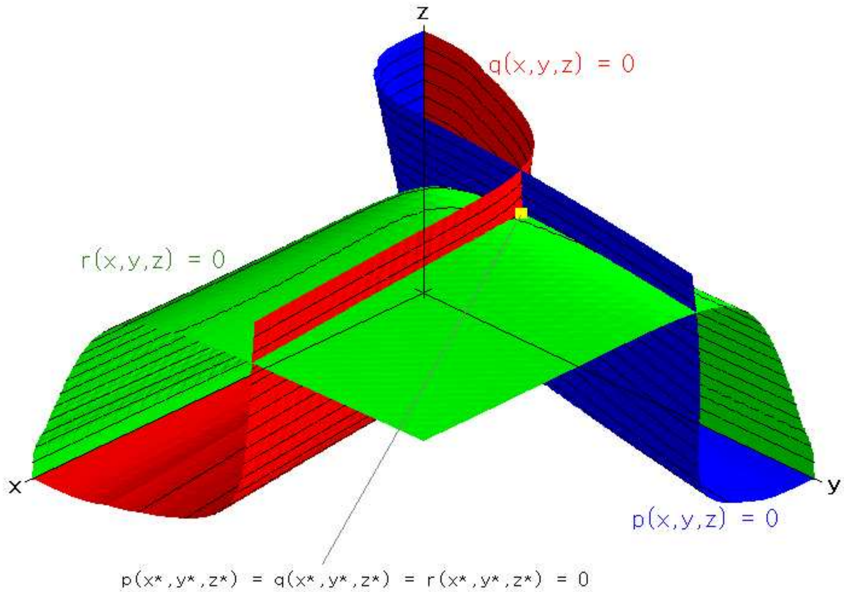
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

A legkisebb négyzetes célfüggvény parciális deriváltjaiból származtatott $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ és $r(x, y, z)$ 3-változós polinomok zérushelyeinek halmaza egy-egy felület (3. ábra), melyek egyetlen $(x^\star, y^\star, z^\star)$ pontban metszik egymást, azaz $p(x^\star, y^\star) = q(x^\star, y^\star) = 0$. Számítással ellenőrizhető, hogy $(x^\star, y^\star, z^\star)$ pontban a célfüggvény Hesse-mátrixa pozitív definit, így valóban minimumhelyet kaptunk.

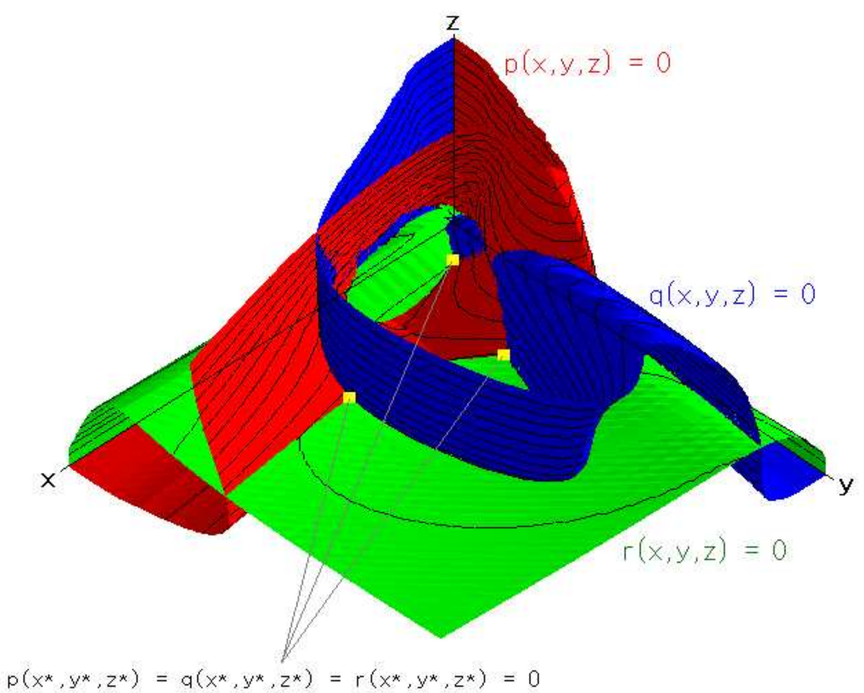
Második példánkban legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{7} & 1 & 7 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & 1 & 7 \\ 9 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}.$$

A $p(x, y, z) = 0$, $q(x, y, z) = 0$, és $r(x, y, z) = 0$ egyenleteinek megoldása olyan felületek, amelyek három pontban metszik egymást (4. ábra).



3. ábra 4×4-*es mátrix alapján felírt háromváltozós polinomrendszer megoldása (egy gyök esete)*



4. ábra 4×4-*es mátrix alapján felírt háromváltozós polinomrendszer megoldása (több gyök esete)*

4.3.6. Homotópiás módszer

Az utóbbi 25 év során a homotópiás kontinuitási módszerek megbízható és hatékony technikává fejlődtek a polinomiális rendszerek összes megoldásának meghatározására.

Garcia és Zangwill [44], valamint tőlük függetlenül Drexler [31] javasolta elsőként a homotópiás módszerek alkalmazását polinomiális rendszerek összes gyökének numerikus meghatározására. A homotópiás kontinuitás módszer alapgondolata a következő: Adott $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$,

$$
\begin{aligned}
P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\
P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\
&\vdots \\
P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

polinomrendszerhez definiáljuk a $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$

$$
\begin{aligned}
Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\
Q_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\
&\vdots \\
Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

polinomrendszert úgy, hogy $\mathbf{Q}$ gyökeit már ismerjük. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és definiáljuk a

$$H(\mathbf{x}, t) = (1 - t)\mathbf{Q}(\mathbf{x}) + t\mathbf{P}(\mathbf{x}) = 0$$

parametrikus egyenletrendszert, ahol $0 \le t \le 1$. Q megválasztásánál arra kell ügyelni, hogy a következő tulajdonságok teljesüljenek:

(1) trivialitás: $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0$ megoldásai ismertek;

(2) simaság: a $H(\mathbf{x}, t) = 0$ $(0 \le t \le 1)$ megoldáshalmaza véges sok sima útból áll, melyek mindegyike t-vel paraméterezhető;

(3) elérhetőség: a $H(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) = 0$ rendszer minden izolált megoldása elérhető valamely $t = 0$-ból induló út mentén, mely út kezdőpontja tehát a $H(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0$ rendszer egy megoldása.

Jelölje d_i a P_i polinom teljes fokát,

$$d_i = \deg P_i(\mathbf{x}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

és legyen $d = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$. A többváltozós polinomokra vonatkozó Bezout-tétel értelmében a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ polinomok teljes fokainak szorzata (d) felső becslést ad a közös gyökök számára (multiplicitással) $\mathbb{C}^n$-ben. $\mathbf{Q}$ választására gyakran a következő hatványfüggvények adódnak:

$$\begin{aligned}
Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_1 x_1^{d_1} = 0, \\
Q_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_2 x_2^{d_2} = 0, \\
&\vdots \\
Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_n x_n^{d_n} = 0,
\end{aligned}$$

ahol $d_i = \deg P_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \ldots, n$, az $a_j, b_j, j = 1, 2, \ldots, n$ pedig tetszőleges, általában véletlenszerűen generált komplex számok. Ezek teljesítik a fenti három tulajdonságot, így a $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = 0$ gyökei a $H(\mathbf{x}, t) = 0, (0 \leq t \leq 1)$ megoldásaként adódó d számú út végpontjai között keresendők.

A tapasztalatok szerint azonban d értéke nagyságrendekkel nagyobb lehet, mint a keresett gyökök száma, és az utak többsége nem tényleges gyökhöz konvergál, hanem a végtelenbe. A polinomrendszerek gyökszámának jobb becslésére szolgál Bernstein [8], Kushnirenko [71] és Khovanskii [65] módszere, amely a kisebb számú út vizsgálatával a homotópiás módszert hatékonyabbá teszi.

Lehetőségem nyílt Li és Gao [77, 43] algoritmusának tesztelésére. A 3. táblázatban összefoglaltam a páros összehasonlítás mátrixokra felírt legkisebb négyzetes közelítés feladatából adódó polinomrendszerek megoldásának átlagos adatait és a homotópiás algoritmus futási idejét 1 GHz-es processzoron.

A 3×3-as eset elemzésében [S-1] található olyan mátrix-konstrukció, amelyhez tartozó LSM-feladatnak négy lokális minimumhelye van. Ezek azonban gyakorlati szempontból nem tűnnek elsődleges fontosságúnak. A 3×3-asnál nagyobb esetben néhány tapasztalati (konkrét feladatra döntéshozó által megadott), valamint véletlenszerűen generált páros összehasonlítás mátrixokat vizsgáltam. Számításaim szerint a tapasztalati mátrixok esetén a legkisebb négyzetes súlyvektor az esetek döntő részében egyértelmű, de még a véletlenszerűen generált mátrixok esetében is csak elvétve fordult elő 2 megoldásnál több.

A mátrix mérete ($n \times n$)	n =3	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$
CPU time	0.05 mp.	0.5 mp.	20 mp.	14 perc	10 óra	3 nap
Közös gyökök száma	24	224	1840	14000	$\sim 10^5$	$\sim 10^6$
Közös pozitív valós gyökök száma	1 és 7 között					

3. táblázat *Polinomrendszerek megoldása* ($n = 3, 4, \ldots, 8$)

5. Számítási eredmények

A páros összehasonlítás mátrix alapján történő súlymeghatározásra szolgáló módszerek közül hármat (EM, LSM, SVD) vizsgálok meg és hasonlítok össze. Az egyes módszerek szerint adódó súlyvektorok és inkonzisztencia-értékek alapján három kérdést vizsgálok:

- a különböző módon számított inkonzisztencia-értékek milyen kapcsolatban vannak egymással (5.1. alfejezet);

- a 3 módszer milyen esetben ad hasonló (pl. ugyanazt a sorrendet eredményező) súlyokat (5.2. alfejezet);

- a Saaty által definiált EM-inkonzisztencia jelentése a mátrix méretének függvényében (5.3. alfejezet).

5.1. Inkonzisztencia-típusok vizsgálata

Az inkonzisztencia a páros összehasonlítás mátrixoknak azt a tulajdonságát hivatott kifejezni, hogy a benne szereplő értékek (arányok) mennyire következetesek, mennyire állnak egymással harmóniában.

Tekintsünk egy egyszerű példát. Tegyük fel, hogy a döntéshozó az $\mathcal{A}$ alternatívát 3-szor jobbnak látja $\mathcal{B}$-nél és $\mathcal{B}$-t 2-szer jobbnak $\mathcal{C}$-nél. Milyen értéket várhatunk $\mathcal{A}$ és $\mathcal{C}$ összehasonlítását illetően? Ha a döntéshozó konzisztens, akkor $\mathcal{A}$ 6-szor jobb számára, mint $\mathcal{C}$, ez pontosan a tranzitivitásnak felel meg. A gyakorlatban azonban nem várható el, hogy minden alternatíva-hármasra ellenőrizzük a tranzitivitást, és joggal tartjuk elfogadhatónak, ha az előbbi esetben a döntéshozó csak 5.5-szer, vagy éppen 7-szer látja jobbnak $\mathcal{A}$-t $\mathcal{C}$-nél. Nem könnyű azonban azt a határt definiálni, amely alatt vagy felett már határozottan állíthatjuk, hogy a döntéshozó preferenciái következetlenek. Milyen eredményt adhat az, ha a döntéshozó szerint $\mathcal{A}$ nem is jobb $\mathcal{C}$-nél? Ez az eset gyakran előfordul sportversenyeken, amikor az egyes csapatok „körbeverik” egymást. Kevésbé extrém eset az, amikor $\mathcal{A}$ ugyan jobb $\mathcal{C}$-nél, de csak pl. 1.1-szer. Milyen sorrendet állapíthatunk meg ekkor? $\mathcal{A}$ biztosan a legjobb, hiszen mindkét összehasonlításakor jobb volt, $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ helyzetét illetően azonban vita lehet. A $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ közvetlen összehasonlítása szerint $\mathcal{B}$ lenne a második helyezett és $\mathcal{C}$ az utolsó, de ha azt tekintjük, hogy $\mathcal{C}$ éppenhogycsak (1.1) alulmaradt a győztes $\mathcal{A}$-val szemben, míg $\mathcal{B}$-nél $\mathcal{A}$ 3-szor jobb volt.

Definíció szerint, az

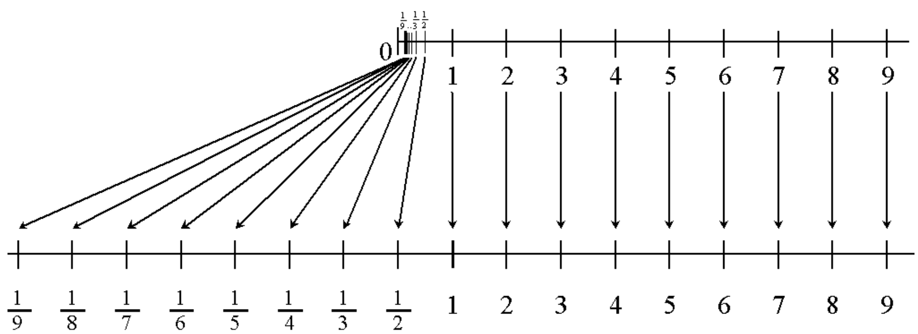
$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ \frac{1}{a} & 1 & c \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix akkor és csak akkor konzisztens, ha $ac = b$.

A páros összehasonlítás mátrix egy tetszőleges a_{ij} elemét tekintve (1)-(2) alapján 3 eset lehetséges:

- $a_{ij} > 1$, $a_{ji} < 1$;
- $a_{ij} < 1$, $a_{ji} > 1$;
- $a_{ij} = a_{ji} = 1$.

Az arányskála elemeinek ezt az 1-re vonatkozó szimmetria tulajdonságát használom fel. Ha a mátrix elemeinek függvényében szeretnénk valamilyen mennyiséget (pl. inkonzisztenciát) ábrázolni, grafikonjaink tengelyein az alábbi skálatranszformációt alkalmazzuk: az 1-nél nagyobb elemeket a számegyenesen 1-től jobbra helyezzük el növekvő sorrendben; az 1-nél kisebb elemeket pedig a számegyenesen 1-től balra, csökkenő sorrendben (5. ábra). Ezzel lehetővé válik az $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{9}$ értékek egyenletes elhelyezkedése.

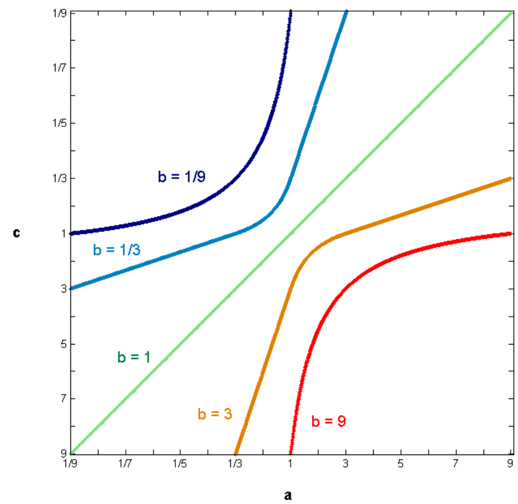


5. ábra *Az* $\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots, 9$ *arányszámok ábrázolása*

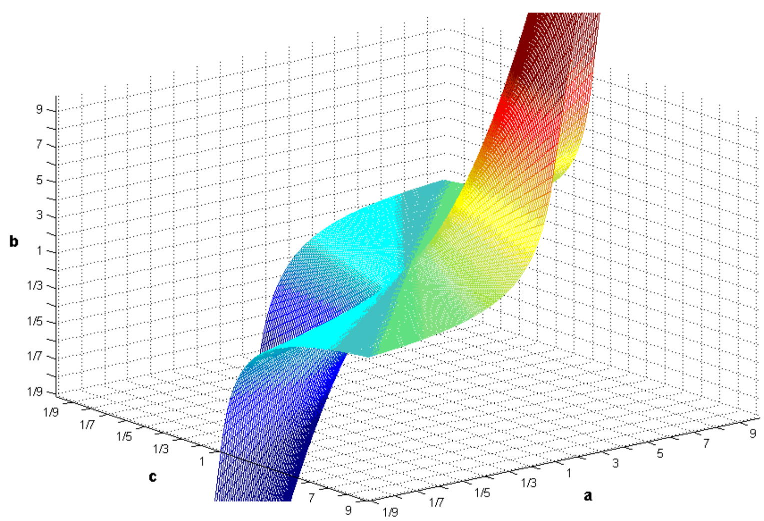
Ezt a skálatranszformációt alkalmazva, rögzített b értékek mellett felrajzoltam azokat az a, c párokat, amelyekkel az

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1/a & 1 & c \\ 1/b & 1/c & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix konzisztens lesz (6. ábra). A konzisztens mátrixot adó (a, b, c) számhármasok térbeli elhelyezkedését a 7. ábrán mutatom be.



6. ábra *Konzisztens mátrixot adó a, c párok rögzített b értékek mellett*



7. ábra *Konzisztens mátrixot eredményező a, b, c értékek*

Egy 3×3-as mátrix kitöltéséhez három elemre van szükség, ezek mindegyikét a leggyakrabban használt $\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots, 9$ skálából választva összesen $17^3 = 4913$ mátrix generálható, ezen mátrixok képezik e fejezet számítási eredményeinek alapját. Jegyezzük meg, hogy a 4913 mátrix között számos konzisztens található, pl.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

A generált mátrixok között szintén vannak olyanok, amelyeket a gyakorlati döntéshozatal során teljességgel elfogadhatatlannak tartanánk, mint pl. a

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 1 & 9 \\ 9 & \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 8 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 1 & 8 \\ 8 & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 9 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{9} & 1 & 9 \\ 8 & \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

mátrixok, melyek tehát inkább elméleti jelentőséggel bírnak.

Annak oka, hogy egyetlen mátrixot sem zárok ki eleve a további vizsgálatokból, az, hogy nem ismeretes, hol kell meghúzni a határvonalat az érdekesek és az érdektelenek között.

Az inkonzisztencia mérésének lehetőségei

Az Analytic Hierarchy Process (AHP) elméletében a Saaty [106] által bevezetett 10%-os szabályt alkalmazzák, melynek elve a következő: Belátható, hogy bármely páros összehasonlítás mátrix λ_{max} domináns sajátértékére $\lambda_{max} \geq n$ teljesül, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a mátrix konzisztens. A CI konzisztencia-index (Consistency Index),

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}.$$

definíciójából adódóan nemnegatív. Generáljunk $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrixokat véletlen módon úgy, hogy minden mátrixelemet (elegendő csak a felső háromszögmátrix elemeket tekinteni) az $\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots, 8, 9$ skálából egyenlő valószínűséggel $(\frac{1}{17})$ választjuk. Az így generált mátrixok CI konzisztencia-indexének átlagos értékét jelöljük $MRCI_n$-nel. $MRCI_n$ természetszerűleg függ n-től, de a véletlen számok generálásának módszerétől is. Az AHP irodalmának terjedelméhez viszonyítva elenyésző azoknak a munkáknak a száma, amelyekben felmerül a véletlen számgenerálás módszertan megválasztásának problematikája. Egy a kevés közül Tummala és Ling [124] dolgozata.

Egy adott mátrix inkonzisztenciájának mérésére a

$$CR = \frac{CI}{MRCI_n}$$

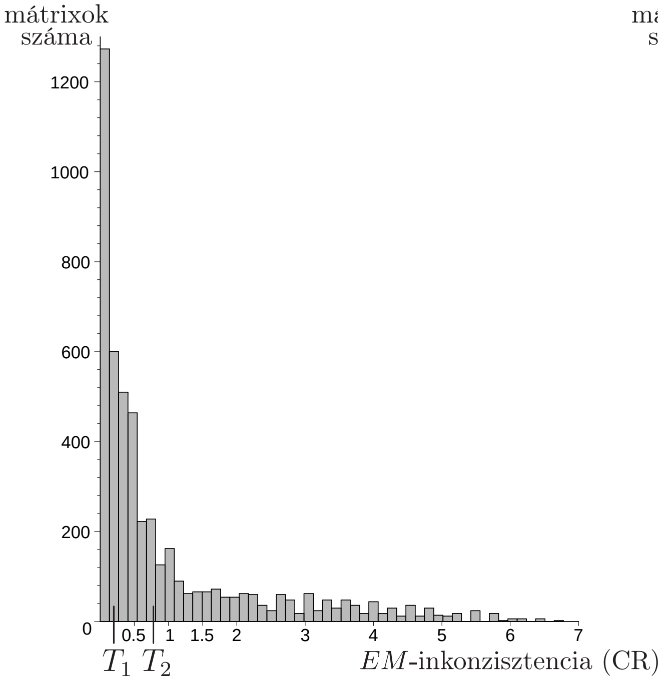
konzisztencia-arány (Consistency Ratio) szolgál. Ha a mátrix konzisztens, akkor $\lambda_{max} = n$, tehát $CI = 0$ és $CR = 0$. A definíciókból következik, hogy egy véletlenül generált mátrix várható CR-értéke 1. Saaty eredeti meghatározása szerint azok a mátrixokat tekinthetők elfogadhatónak, amelyek CR-értéke legfeljebb 10%. Később ezt 3×3-as mátrixok esetében 5%-ra, 4×4-es mátrixok esetében 8%-ra módosította [107]. A 10%-os szabály statisztikai interpretációját Vargas [127] adta meg.

A távolságminimalizáló módszerek esetében kézenfekvőnek tűnik az, hogy maga a közelítés hibája legyen az inkonzisztencia mértéke (lásd 4.1. fejezet, 2. táblázat). Konzisztens esetben a közelítés hibája 0, egyébként pedig minél (az adott célfüggvény szerinti értelemben) távolabb esik a mátrix a konzisztenstől, annál nagyobb az inkonzisztencia mértéke.

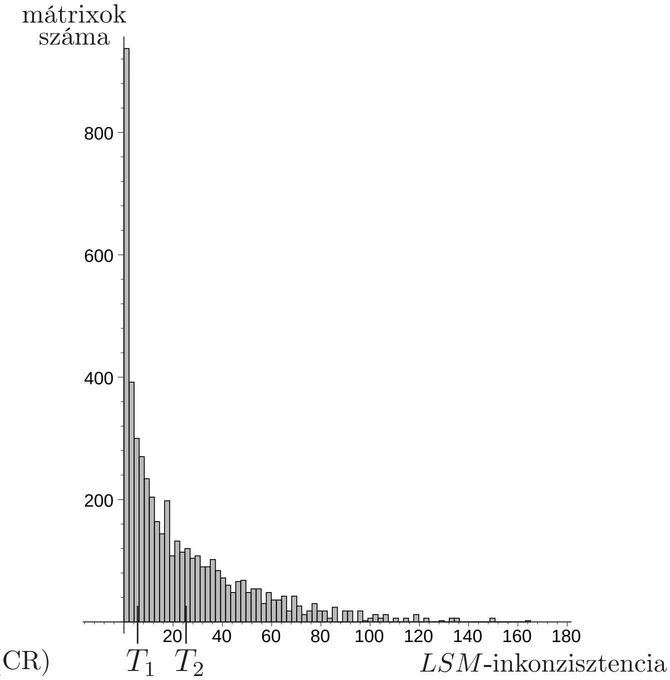
Ennél részletesebb elemzést tesznek lehetővé a 4. táblázat és a 8.a-c ábrák, amelyeken a mátrixok inkonzisztencia szerinti eloszlását ábrázoltam hisztogrammal. A sajátvektor- és a legkisebb négyzetek módszer esetében megfigyelhető, hogy igen magas a kis inkonzisztenciájú mátrixok száma, majd rohamosan csökken a kevésbé konzisztenseké. A szinguláris felbontáshoz tartozó inkonzisztencia mérték szerinti eloszlás lényegesen egyenletesebb. Ezt az észrevételt számszerűsíteni is lehet a tercilisek bevezetésével. A 4913 db mátrixot három egyenlő nagyságú csoportba osztottam: a T_1 tercilisnél kisebb inkonzisztenciájú 1638 mátrix, a T_1 és T_2 közötti 1637, a T_2-nél nagyobb 1638 mátrix pedig a legkevésbé konzisztens csoportot adja. A tercilisek értékei a hisztogramok alatt szerepelnek. Csak a szinguláris felbontásnál nevezhető egyenletesnek a tercilisek elhelyezkedése az inkonzisztencia teljes skálájához viszonyítva, a másik három módszer esetében egyértelműen az intervallum bal oldalára koncentrálódnak.

Inkonzisztencia típusa	Lehetséges inkonzisztencia értékek intervalluma	Első tercilis (T_1)	Második tercilis (T_2)
EM (CR)	[0,6.78]	0.21	0.79
LSM	[0,165]	6.23	25.8
SVD	[0,15]	3.38	6.88

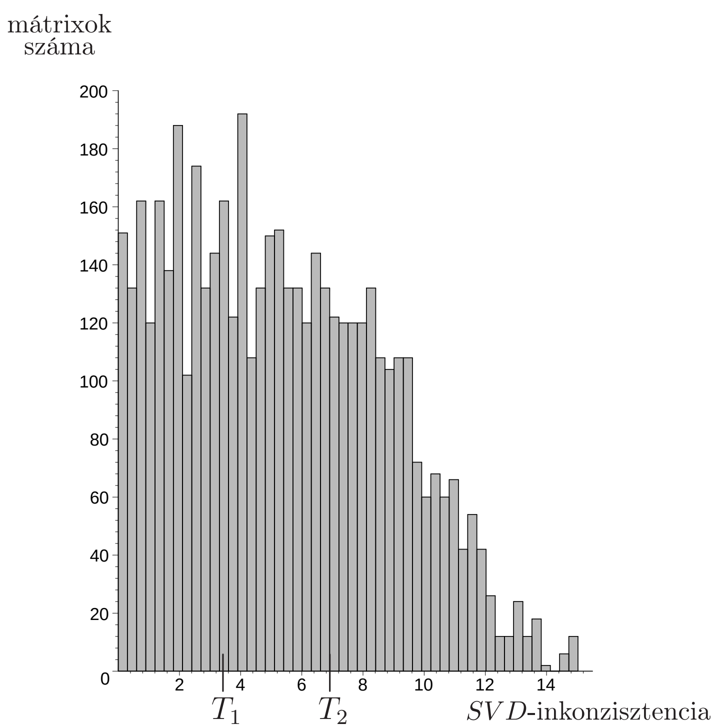
4. táblázat 3×3-*as mátrixok lehetséges inkonzisztencia értékei a különböző definíciók szerint*



8.a ábra *EM-inkonzisztenciák eloszlása*
$T_1 = 0.21, \quad T_2 = 0.79$



8.b ábra *LSM-inkonzisztenciák eloszlása*
$T_1 = 6.23, T_2 = 25.8$



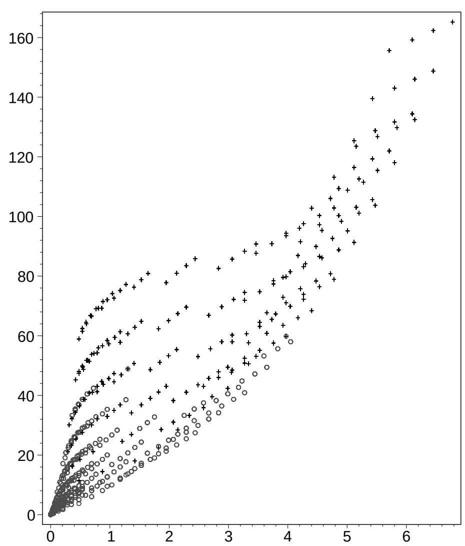
8.c ábra *SVD-inkonzisztenciák eloszlása*
$T_1 = 3.38, \quad T_2 = 6.88$

A 4. táblázat utolsó oszlopának, valamint a 8.a-c ábrák tanúsága szerint a különböző módszerekhez tartozó inkonzisztencia-értékek egészen eltérő skálákon vannak mérve. Az összehasonlítás első lépéseként vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat van a sajátvektor módszerhez tartozó inkonzisztencia-mérték a másik három módszer inkonzisztenciája között. A 9.a ábrán a sajátvektor - legkisebb négyzetek módszere összehasonlítás eredményét mutatom be a 4913 db 3 × 3-as mátrix alapján. Azokban az esetekben, amikor a legkisebb négyzetes megoldás nem egyértelmű, mindegyik megoldáshoz tartozó értéket szerepeltettem, és külön jelöléssel (+) láttam el. Az AHP klasszikus elméletében a páros összehasonlítás mátrixok elfogadhatósága a

$$CR = \frac{\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}}{RI_n} < 10\%$$

feltétellel definiált. Ezt szem előtt tartva, az 9.a ábra bal alsó sarka kinagyítva is szerepel (9.b ábra). Hasonló módon történt a sajátvektor és szinguláris módszer összehasonlítása (10.a-b ábrák).

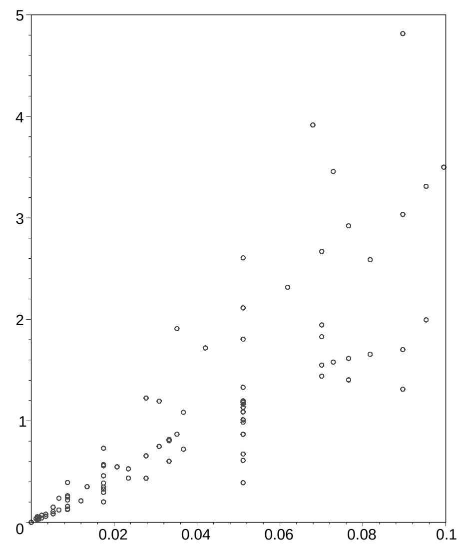
LSM-
inkonzisztencia



EM- inkonzisztencia (CR)

9.a ábra *EM-LSM inkonzisztenciák*

LSM-
inkonzisztencia

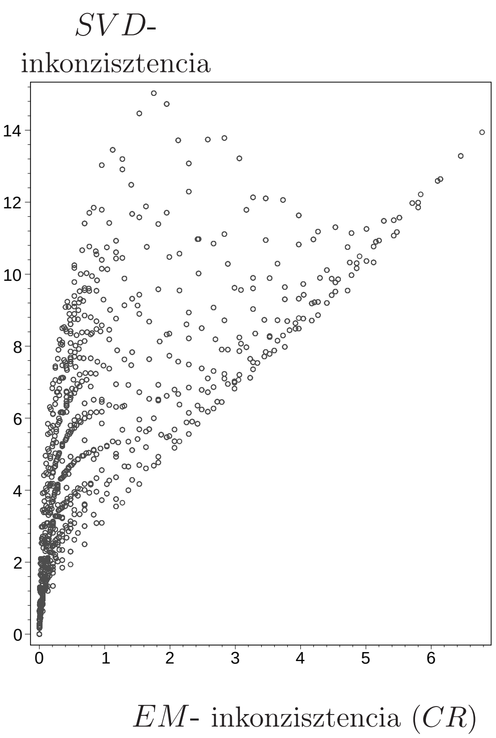


EM- inkonzisztencia (CR)

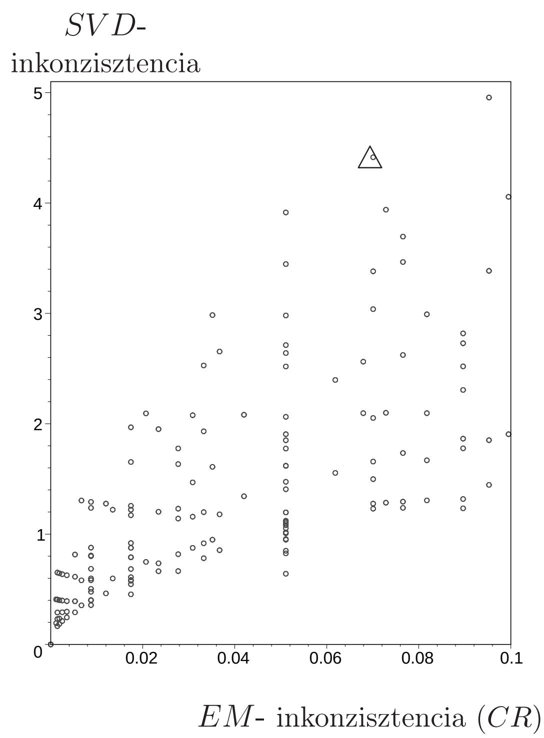
9.b ábra *EM-LSM inkonzisztenciák* ($CR < 10\%$)

Az első esetben elmondható, hogy kis CR-értékekhez kis LSM-inkonzisztenciák tartoznak, vagyis a $CR < 10\%$ feltételt kielégítő mátrixok a LSM-értelemben véve is közel konzisztensnek mondhatók. Érdekes képet mutat viszont a szinguláris felbontás (10.a-b ábrák), mivel léteznek olyan EM értelemben közel konzisztens mátrixok, amelyek SVD-inkonzisztenciája igen magas. Egy ilyen mátrix a 10.b ábrán $\triangle$-gel jelölt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & 9 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix}.$$



10.a ábra $EM - SVD$ *inkonzisztenciák*



10.b ábra $EM - SVD$ *inkonzisztenciák* ($CR < 10\%$)

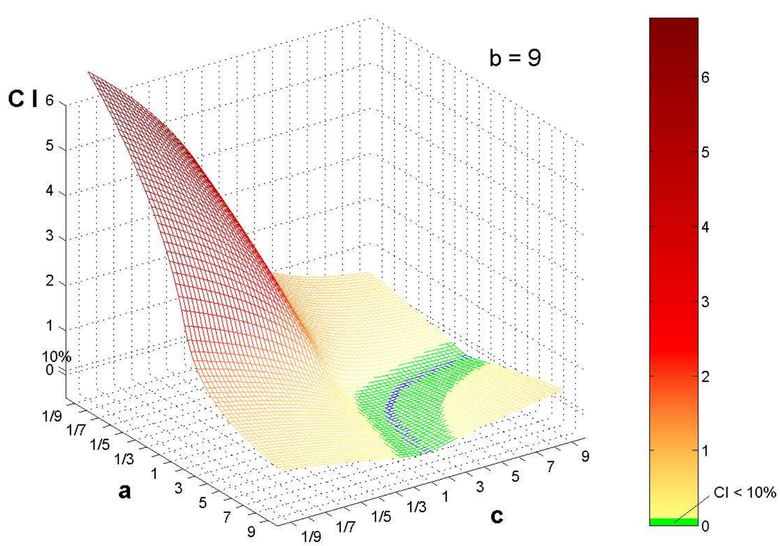
Következő vizsgálatomban az

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ \frac{1}{a} & 1 & c \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$$

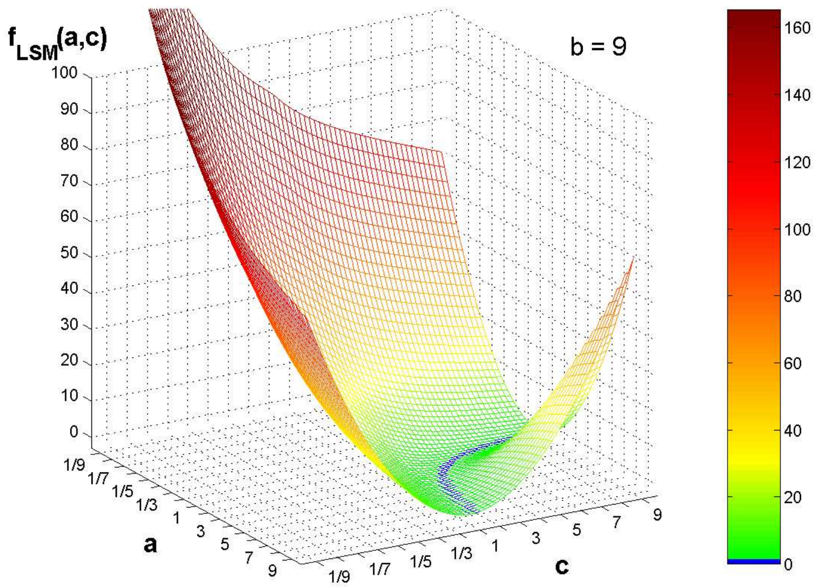
mátrix különböző értelemben vett inkonzisztenciáit ábrázoltam rögzített $b = 9$ érték mellett. A 6. ábrán felrajzoltam a konzisztens mátrixok eredményező (a, c) párok görbéjét. Felmerül a kérdés, hogy ezen görbe mekkora környezetében tekinthetjük a mátrixot elfogadhatónak. A 11.,12. és 13. ábrákon felrajzoltam az EM, LSM és SVD módszerek által definiált inkonzisztencia-mérőszámokat (a, c) függvényében, kék színnel jelölve a konzisztens mátrixot adó (a, c) párok halmazát. A 11. ábrán zöld színnel jelöltem a 10%-os EM-inkonzisztenciaszint alatti mátrixokat. A függvények összehasonlítása alapján elmondható, hogy a konzisztens görbétől távolodva

- az EM-inkonzisztencia viszonylag lassan;
- az LSM-inkonzisztencia először lassan, majd egyre gyorsabban;
- az SVD-inkonzisztencia először gyorsan, majd lassuló ütemben

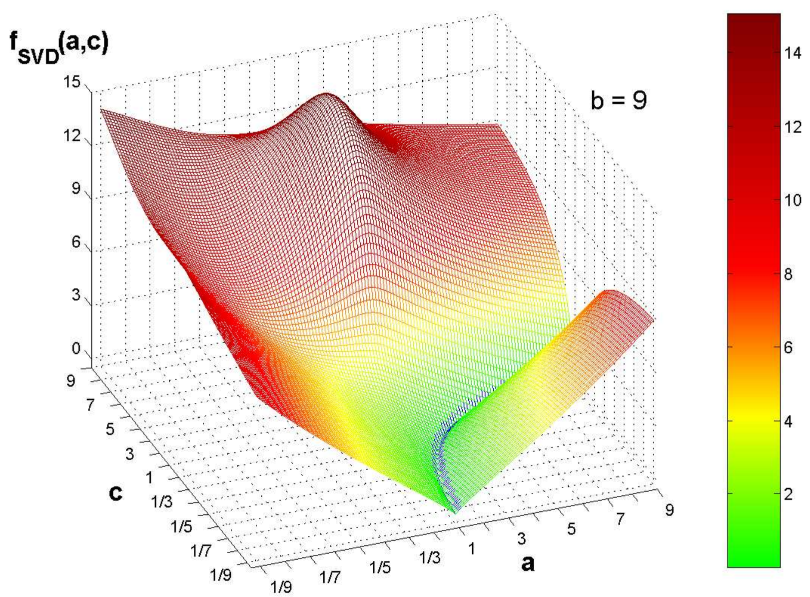
növekszik. Ezen eredmények azt mutatják, hogy a közel konzisztens tartományban a vizsgált három módszer közül az SVD a legalkalmasabb az inkonzisztencia-szintek markáns megkülönböztetésére.



11. ábra *EM-inkonzisztencia* (a, c) *értékeinek függvényében* ($b = 9$ *rögzített*)



12. ábra *LSM-inkonzisztencia* (a, c) *értékeinek függvényében* $(b = 9$ *rögzített)*



13. ábra *SVD-inkonzisztencia* (a, c) *értékeinek függvényében* $(b = 9$ *rögzített)*

5.2. Súlyvektorok különböző módszerek szerint

Hasonlítsuk most össze a súlyozási módszereket más szempontból is. A döntési feladatok megoldása során kiemelt jelentősége van magának a súlyvektornak, hiszen ebből olvasható ki az alternatívák sorrendje. A következő elemzés az egyes módszerek által adott súlyvektorok közötti összefüggéseket tárgyalja. Továbbra is a 3×3-as mátrixok körében maradva, a következő ábrázolási módot alkalmazzuk: a

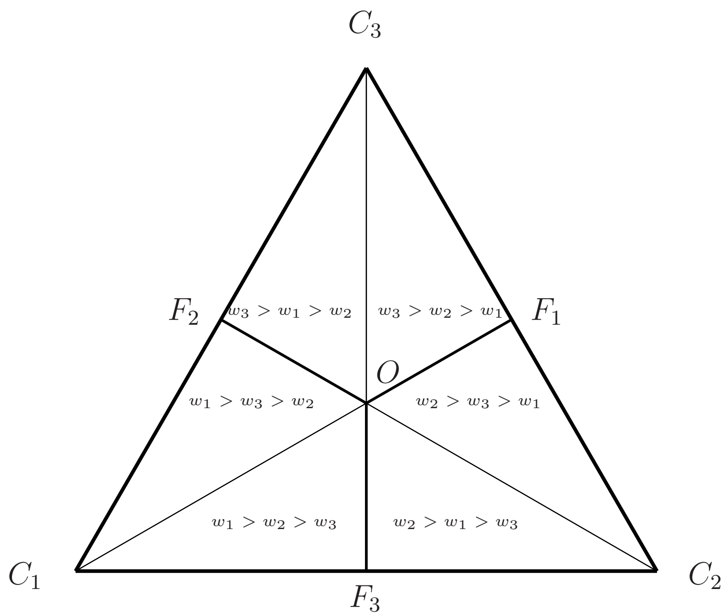
$$w_1 + w_2 + w_3 = 1,$$
$$(w_1, w_2, w_3)^T \in \mathbb{R}^3_+$$

feltételeknek eleget tevő vektorok a 3-dimenziós egységszimplex pozitív ortánsba eső részét alkotják, ami az $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ és $(0,0,1)$ pontok által meghatározott nyílt háromszöglemez (14. ábra). Jelöljük e csúcsokat C_1, C_2, C_3-mal. Másrészt, a háromszög tetszőleges belső pontja előáll mint a csúcsok konvex kombinációja, az együtthatók pedig épp a (w_1, w_2, w_3) súlyvektort adják vissza. Ebből a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésből azonnal adódik például, hogy a szabályos háromszög O középpontja az $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ súlyvektornak felel meg. Jelöljük a háromszög oldalfelező pontjait F_1, F_2, F_3-mal. A szabályos háromszög tulajdonságai miatt ekkor a C_1F_1, C_2F_2, C_3F_3 súlyvonalak az O pontban metszik egymást, és az általuk a háromszögből kijelölt tartományok a következőképpen jellemezhetők:

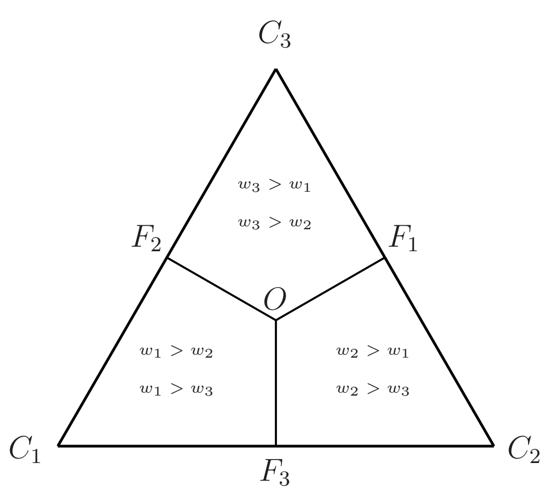
C_1OF_3 nyílt háromszögtartomány: $w_1 > w_2 > w_3$;
C_1OF_2 nyílt háromszögtartomány: $w_1 > w_3 > w_2$;
C_3OF_2 nyílt háromszögtartomány: $w_3 > w_1 > w_2$;
C_3OF_1 nyílt háromszögtartomány: $w_3 > w_2 > w_1$;
C_2OF_1 nyílt háromszögtartomány: $w_2 > w_3 > w_1$;
C_2OF_2 nyílt háromszögtartomány: $w_2 > w_1 > w_3$.

A döntési feladatok szempontjából ez az alternatívák lehetséges 6 sorrendjének a geometriai interpretációját jelenti. Ha adott szituációban csak az első helyezettre vagyunk kíváncsiak, akkor a tartományok az előző háromszöglapok uniójaként állnak elő (15. ábra) :

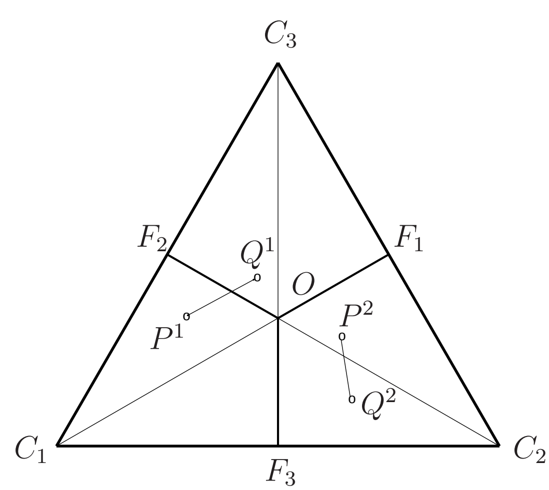
$C_1F_2OF_3$ nyílt deltoidtartomány: $w_1 > w_2, \quad w_1 > w_3$;
$C_3F_1OF_2$ nyílt deltoidtartomány: $w_3 > w_1, \quad w_3 > w_1$;
$C_2F_1OF_3$ nyílt deltoidtartomány: $w_2 > w_3, \quad w_2 > w_1$.



14. ábra *Az egységszimplex különböző rangsoroknak megfelelő tartományai*



15. ábra *Az első helyezettnek megfelelő tartományok*



16. ábra *Rangsorfordulás az első* (P^1, Q^1), *ill. második* (P^2, Q^2) *helyen*

A különböző súlyozási módszerek összehasonlítása szempontjából lényeges azon mátrixok vizsgálata, amelyekhez tartozó súlyvektorok eltérő sorrendet definiálnak. Tekintsünk két súlyvektort, a hozzájuk tartozó háromszögbeli pontokat jelölje P^1 és Q^1. Ha valamely $OF_i\,(i = 1, 2, 3)$ szakasz elválasztja a P^1 és Q^1 pontokat, akkor a hozzájuk tartozó rangsorok első helyezettjei is különböznek (15. ábra).

Egy másik lehetőség az, amikor az első helyezettben ugyan megegyezik a két rangsor, a második (és harmadik) helyen viszont különböznek. Erre mutat példát a P^2 és Q^2 pontok elhelyezkedése (16. ábra).

Az ábrázolási mód ismertetése után bemutatásra kerülnek az EM, SVD és LSM súlyozási módszerek által adott súlyvektorokat egymással összehasonlítva. Konzisztens mátrixok esetén nincs szükség összehasonlításra, minden módszer ugyanazt az eredményt adja. A cél az, hogy megmutassuk, hogy az inkonzisztencia növekedésével milyen mértékben különböznek az egyes módszerekkel kapott súlyvektorok. Tekintsük a 3×3-as mátrixok (4913 db) következő három részhalmazát:

- a *közel konzisztens*eket (17.a ábra), azaz azokat, amelyek inkonzisztenciája az első tercilis alatt van mindkét definíció szerint:

$$0 < EM\text{-inkonzisztencia} < 0.21,$$
$$0 < LSM\text{-inkonzisztencia} < 6.23;$$

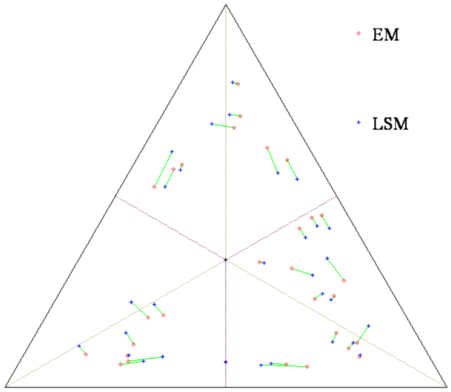
- a *közepesen inkonzisztens*eket (17.b ábra), amelyek inkonzisztenciája az első és a második tercilis között van mindkét definíció szerint:

$$0.21 < EM\text{-inkonzisztencia} < 0.79,$$
$$6.23 < LSM\text{-inkonzisztencia} < 25.8;$$

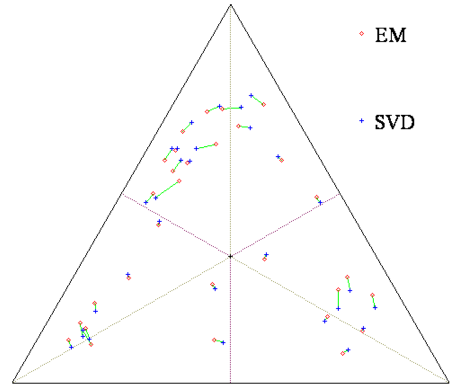
- a *nagyon inkonzisztens*eket (17.c ábra), amelyek inkonzisztenciája a második tercilis felett van mindkét definíció szerint:

$$0.79 < EM\text{-inkonzisztencia},$$
$$25.8 < LSM\text{-inkonzisztencia}.$$

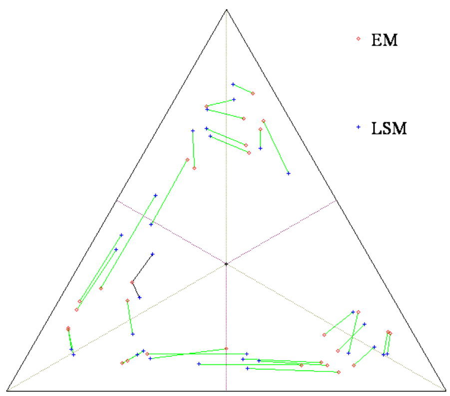
Mindhárom halmazból véletlenszerűen választottam ki néhány mátrixot, és az ugyanahhoz a mátrixhoz tartozó EM- illetve LSM-súlyvektoroknak megfelelő pontokat összekötöttük. Azokban az esetekben, amikor a legkisebb négyzetes közelítés megoldása nem egyértelmű, az összes megoldást ábrázoltam, ezért fordul elő, hogy egy EM-ponthoz több (2 vagy 3) LSM-pont is tartozik (17.b és 17.c ábrák). Hasonló módon ábrázoltam a sajátvektor- és szinguláris felbontás módszerekkel számított súlyvektorokat (18.a-c ábrák).



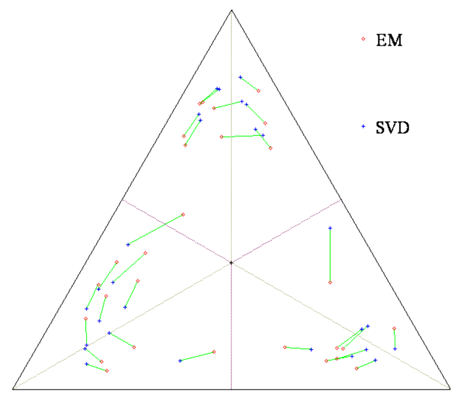
17.a ábra *EM- és LSM-súlyvektorok közel konzisztens mátrixok esetén*



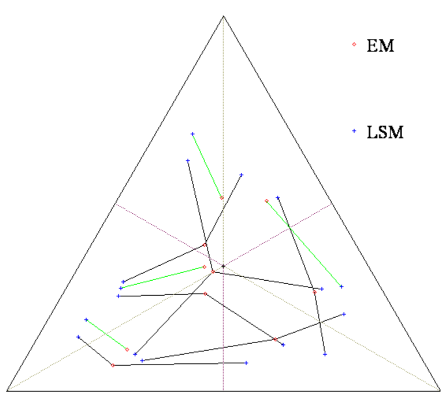
18.a ábra *EM- és SVD-súlyvektorok közel konzisztens mátrixok esetén*



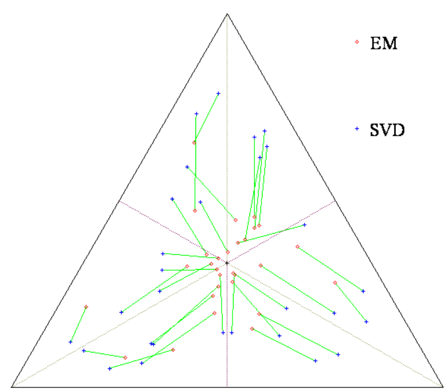
17.b ábra *EM- és LSM-súlyvektorok közepesen inkonzisztens mátrixok esetén*



18.b ábra *EM- és SVD-súlyvektorok közepesen inkonzisztens mátrixok esetén*



17.c ábra *EM- és LSM-súlyvektorok nagyon inkonzisztens mátrixok esetén*



18.c ábra *EM- és SVD-súlyvektorok nagyon inkonzisztens mátrixok esetén*

Tapasztalataim a következőképpen foglalhatók össze:

- a közel konzisztens mátrixok esetén általában nem tapasztalható lényeges eltérés az egyes súlyozási módszerek között. A véletlenszerűen generált mátrixok kis százalékában fordult elő, hogy különböző módszerek különböző rangsort eredményeztek.

- a közepesen inkonzisztens mátrixok esetében már az eltérő rangsor a jellemző, tehát épp az a ritka, ha ugyanarra a mátrixra két módszer ugyanazt a sorrendet adja.

- a nagyon inkonzisztens mátrixok esetében a sorrendek szinte kivétel nélkül eltérőek, kivéve a sajátérték- és szinguláris felbontás módszerek által adott rangsorokat, amelyek többé-kevésbé megegyezők. A súlyvektorok komponensei a sajátvektor módszernél az $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ pont közelében koncentrálódnak, a szinguláris felbontásnál pedig a csúcsok irányában találhatók. Döntési szempontból ez azt jelenti, hogy az erősen inkonzisztens mátrixok alapján képzett sajátvektor-rangsor az alternatívákat közel azonos súllyal látja el, a szinguláris felbontás pedig markánsabban kijelöli valamelyik alternatívát győztesnek.

Az eredmények azt mutatják, hogy az inkonzisztencia lényeges szempont a különböző súlyozási módszerek eredményeinek összehasonlításában.

5.3. Az EM-inkonzisztencia statisztikai vizsgálata

Saaty EM-inkonzisztencia definíciójában [106] véletlen módon generált páros összehasonlítás mátrixok szerepelnek. Érdeklődésem középpontjában a véletlen mátrixok λ_{max} maximális sajátértékeinek tapasztalati eloszlása áll. A mátrixelemeket az

$$\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots, 8, 9$$

skálából választottam azonos, $\frac{1}{17}$ valószínűséggel. Az egyenletes eloszlást a Matlab program *rand* függvényével szimuláltam. Az 5. táblázatban λ_{max} átlagos értékeit, az átlagos konzisztencia indexet (Mean Random Consistency Index, $MRCI_n$), a $CR = 10\%$-os küszöbhöz tartozó λ_{max} értékeket, valamint a $CR \leq 10\%$ feltételt kielégítő mátrixok számát tüntettem fel, a mátrix méretének ($n \times n$, $n = 3, 4, \dots, 10$) függvényében. A generált mátrixok száma minden méretre 10^7.

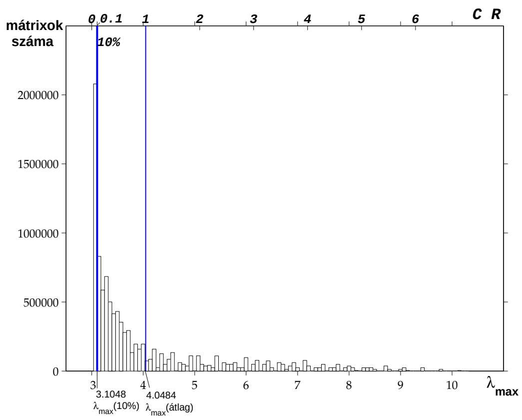
Az eredmények hisztogramok segítségével szemléltethetők. Az 19.a – g ábrák a λ_{max} maximális sajátérték tapasztalati eloszlását mutatják. $n \geq 6$ értékeire az eloszlás alakja nagyon hasonlít a normálishoz. A mátrixok méretének növekedésével a 10%-os szabály lényeges különbséget mutat. $n = 3$-ra a véletlen mátrixok jelentős része (28%-a) teljesíti az inkonzisztencia elfogadhatóságának kritériumát, ez az arány n növekedésével rohamosan csökken. Az $n = 8, 9, 10$ méretekben már egyetlen elfogadható EM-inkonzisztenciájú mátrix sem akadt a véletlenül generált 10 millió között.

Az eredmények ismeretében felmerülhet a kérdés, hogy milyen inkonzisztenciát, következetlenséget mér pontosan ez a definíció. Van-e a véletlenül generált mátrixok és egy konkrét döntési feladatból felírt páros összehasonlítás mátrix közötti kapcsolatnak alapja? Többen [69, 3, 19] hiányolták a 10%-os szabály intuitív tartalmát.

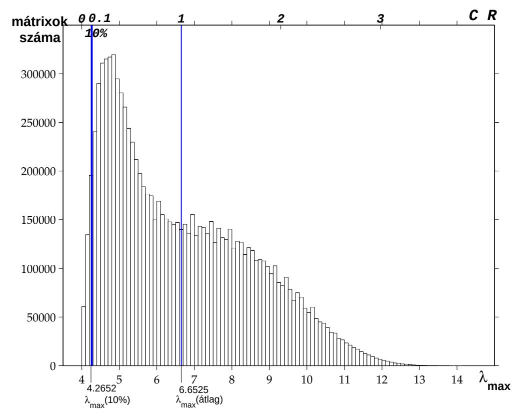
Standard [113] valós szituációkból származó páros összehasonlítás mátrixok elemzésével rámutatott, hogy az esetek nagy részében – különösen nagy méretű mátrixoknál – az EM-inkonzisztencia nagyobb, mint 10%.

n	Generált mátrixok száma	λ_{max} átlagos értéke	$MRCI_n$	$CR = 10\%$-hoz tartozó λ_{max}	$CR \leq 10\%$ mátrixok száma
3	10^7	4.0484	0.5242	3.1048	2 800 000
4	10^7	6.6525	0.8842	4.2652	316 000
5	10^7	9.4347	1.1087	5.4435	24 100
6	10^7	12.244	1.2488	6.6244	787
7	10^7	15.045	1.3408	7.8045	14
8	10^7	17.831	1.4044	8.9831	0
9	10^7	20.604	1.4505	10.16	0
10	10^7	23.3743	1.486	11.3374	0

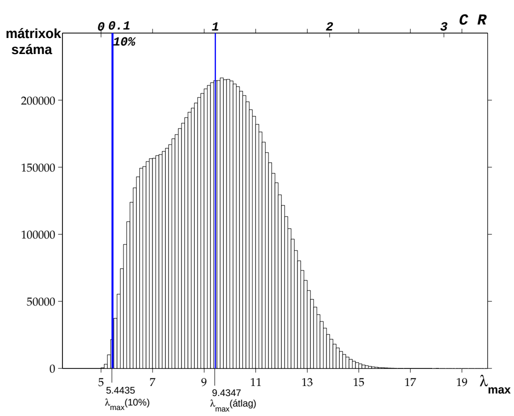
5. táblázat *Véletlen módon generált páros összehasonlítás mátrixok λ_{max} értékei*



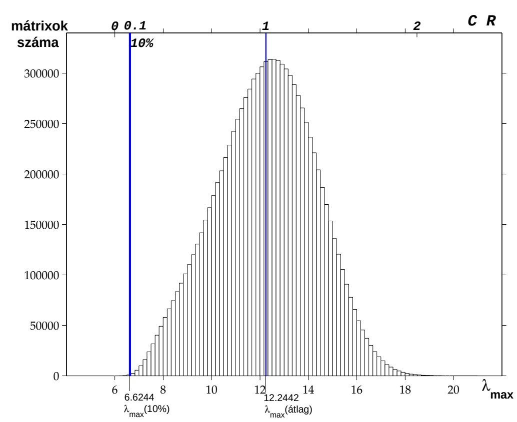
19.a ábra 3×3-*as véletlen mátrixok* λ_{max} *és* CR *értékei*



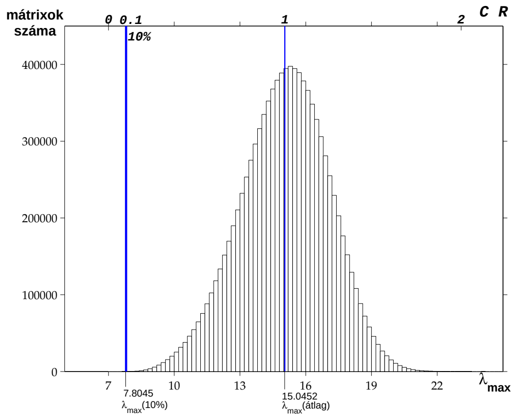
19.b ábra 4×4-*es véletlen mátrixok* λ_{max} *és* CR *értékei*



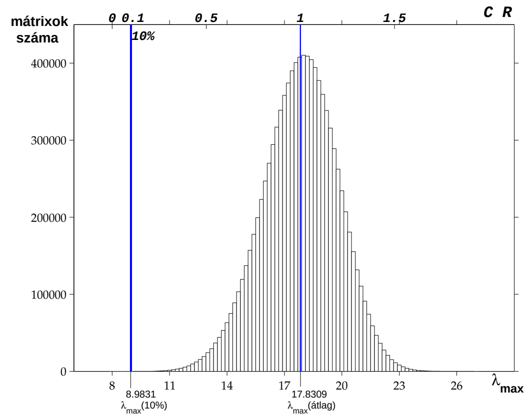
19.c ábra 5×5-*ös véletlen mátrixok* λ_{max} *és* CR *értékei*



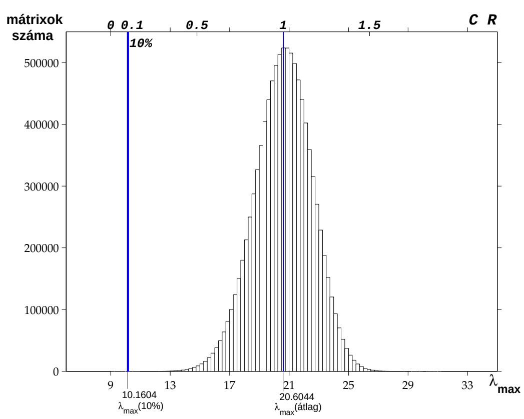
19.d ábra 6×6-*os véletlen mátrixok* λ_{max} *és* CR *értékei*



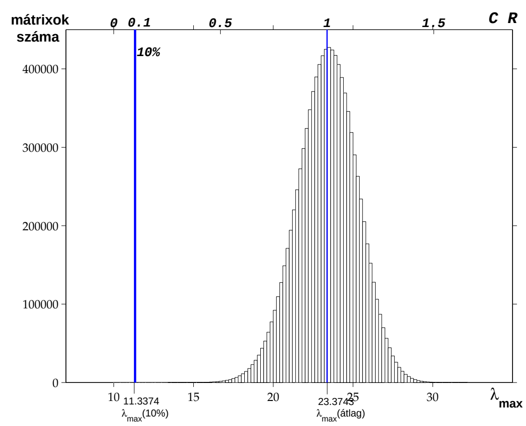
19.e ábra 7×7-*es véletlen mátrixok* λ_{max} *és* CR *értékei*



19.f ábra 8×8-*as véletlen mátrixok* λ_{max} *és* CR *értékei*



19.g ábra 9×9-*es véletlen mátrixok* λ_{max} *és* CR *értékei*



19.h ábra 10×10-*es véletlen mátrixok* λ_{max} *és* CR *értékei*

6. A páros összehasonlítás mátrix a makroökonómia Leontief-féle input-output modelljében

Ebben az alfejezetben a *növekedési mátrix* fogalmát vizsgálom meg, amely kapcsolatot teremt a páros összehasonlítás mátrixok és a Leontief-féle[11] input-output modellek között. A rövid áttekintésben igyekszem igazodni a fogalom fejlődésének kronológiájához.

Stojanović [117] a gazdaság különböző szektoraira vonatkozó megfigyeléseket vette alapul. Kapcsolatot próbált teremteni az egyes ágazatok időbeli növekedései között. Tegyük fel, hogy egy gazdaságban n ágazat van, az i-edik ágazat t-edik időszakbeli kibocsátását jelölje $q_{i,t}$. Vezessük be továbbá a

$$\triangle q_{i,t} = q_{i,t} - q_{i,t-1}$$

jelölést, amely az i-edik szektor kibocsátásának a $t-1$-edik és t-edik időszak között tapasztalt változása, rendszerint növekedése. Stojanović első megközelítése során nem tett semmilyen feltevést a termelési technológiákra vonatkozóan, pusztán a tapasztalati adatok alapján dolgozott. A következőképpen definiálta az i-edik ágazat j-edik ágazatra vonatkozó indirekt növekedési (kereszt-) rátáját:

$$g_{ij,t} = \frac{\triangle q_{i,t}}{q_{j,t}}, \qquad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Az indirekt növekedési rátákból felépíthető egy $n \times n$-es mátrix, amelyet **növekedési mátrix**nak nevezünk:

$$\mathbf{G}_t = [g_{ij,t}]_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\triangle q_{1,t}}{q_{1,t}} & \frac{\triangle q_{1,t}}{q_{2,t}} & \cdots & \frac{\triangle q_{1,t}}{q_{n,t}} \\ \frac{\triangle q_{2,t}}{q_{1,t}} & \frac{\triangle q_{2,t}}{q_{2,t}} & \cdots & \frac{\triangle q_{2,t}}{q_{n,t}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\triangle q_{n,t}}{q_{1,t}} & \frac{\triangle q_{n,t}}{q_{2,t}} & \cdots & \frac{\triangle q_{n,t}}{q_{n,t}} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

$\mathbf{G}_t$ a következő formában is felírható:

[11] Korábbi magyar nyelvű művekben a Leontyev átírás használatos.

$$\mathbf{G}_t = \begin{pmatrix} \frac{\triangle q_{1,t}}{q_{1,t}} & \frac{\triangle q_{1,t}}{q_{1,t}}\frac{q_{1,t}}{q_{2,t}} & \dots & \frac{\triangle q_{1,t}}{q_{1,t}}\frac{q_{1,t}}{q_{n,t}} \\ \frac{\triangle q_{2,t}}{q_{2,t}}\frac{q_{2,t}}{q_{1,t}} & \frac{\triangle q_{2,t}}{q_{2,t}} & \dots & \frac{\triangle q_{2,t}}{q_{2,t}}\frac{q_{2,t}}{q_{n,t}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\triangle q_{n,t}}{q_{n,t}}\frac{q_{n,t}}{q_{1,t}} & \frac{\triangle q_{n,t}}{q_{n,t}}\frac{q_{n,t}}{q_{2,t}} & \dots & \frac{\triangle q_{n,t}}{q_{n,t}} \end{pmatrix}.$$

Ha a gazdaság egyenletesen bővül, azaz a növekedési ráta minden szektorban azonos:

$$\frac{\triangle q_{1,t}}{q_{1,t}} = \frac{\triangle q_{2,t}}{q_{2,t}} = \ldots = \frac{\triangle q_{n,t}}{q_{n,t}} = \overline{g},$$

akkor $\mathbf{G}_t$ a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathbf{G}_t = \begin{pmatrix} \overline{g} & \overline{g}\frac{q_{1,t}}{q_{2,t}} & \dots & \overline{g}\frac{q_{1,t}}{q_{n,t}} \\ \overline{g}\frac{q_{2,t}}{q_{1,t}} & \overline{g} & \dots & \overline{g}\frac{q_{2,t}}{q_{n,t}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{g}\frac{q_{n,t}}{q_{1,t}} & \overline{g}\frac{q_{n,t}}{q_{2,t}} & \dots & \overline{g} \end{pmatrix} = \overline{g} \begin{pmatrix} 1 & \frac{q_{1,t}}{q_{2,t}} & \dots & \frac{q_{1,t}}{q_{n,t}} \\ \frac{q_{2,t}}{q_{1,t}} & 1 & \dots & \frac{q_{2,t}}{q_{n,t}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{q_{n,t}}{q_{1,t}} & \frac{q_{n,t}}{q_{2,t}} & \dots & 1 \end{pmatrix} = \overline{g}\,\mathbf{Q}_t. \quad (31)$$

Vegyük észre, hogy a $\mathbf{Q}_t$ mátrixra teljesülnek a konzisztens páros összehasonlítás mátrix definíciójában szereplő (1)-(2)-(3) feltételek, hiszen pozitív elemű, a főátlóban 1-esek szerepelnek, a főátlóra szimmetrikus elempárok pedig egymás reciprokai, valamint teljesül a tranzitivitási feltétel is.

Stojanović a jugoszláv gazdaság hat szektorát vizsgálta a fentebb definiált növekedési mátrix segítségével egy 9 éves [117], és egy 5 éves időszakban [118]. Steenge [114, 115] megmutatta, hogy a mind a statikus, mind a dinamikus Leontief-modell felírható páros összehasonlítás mátrix segítségével.

A Leontief-féle input-output modell [74] olyan többszektoros termelési modell, amelyben a termékek és a szektorok között egyértelmű megfeleltetés létesíthető azáltal, hogy minden terméket csak egyféle eljárással lehet előállítani és minden eljárás csak egyféle terméket állít elő.

A Leontief-modellt leggyakrabban nemzetgazdasági elemzésekben használják, de alkalmazható egy kisebb gazdasági térség vagy nemzetközi gazdasági unió esetében is.

A számos modellváltozat (lineáris-nemlineáris, nyílt-zárt, statikus-dinamikus-stacionárius, diszkrét-folytonos idejű) közül ebben az alfejezetben eggyel fogunk foglalkozni. Tekintsük a lineáris, zárt, diszkrét idejű Leontief-féle modell primális alapegyenletét [134, 549. o.]:

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{R}_t\mathbf{q}_t + \mathbf{B}_t(\mathbf{q}_{t+1} - \mathbf{q}_t), \tag{32}$$

ahol

- $\mathbf{q}_t = (q_{1,t}, q_{2,t}, \ldots, q_{n,t})^T \in \mathbb{R}^n$ a termékek t-edik időszakbeli kibocsátásaiból képzett vektor;

- $\mathbf{R}_t = [r_{ij,t}]_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: a közvetlen ráfordítási együttható mátrix; $r_{ij,t}$ megmutatja, hogy a j-edik termék 1 egységének előállításakor az i-edik ágazat termékéből mennyi kerül felhasználásra a t-edik időszakban;

- $\mathbf{B}_t = [b_{ij,t}]_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a beruházási együtthatók mátrixa; $b_{ij,t}$ megmutatja, hogy a j-edik ágazat kapacitásának egységnyi bővítéséhez az i-edik ágazat termékéből mennyit kell a felhalmozásra fordítani a t-edik időszakban.

Gyakran felteszik, hogy az $\mathbf{R}$ ráfordítási és a $\mathbf{B}$ beruházási együttható mátrixok időben nem változnak, az időindexük tehát elhagyható:

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{R}\mathbf{q}_t + \mathbf{B}(\mathbf{q}_{t+1} - \mathbf{q}_t).$$

Kifejezve $\mathbf{q}_{t+1}$-et,

$$\mathbf{q}_{t+1} = [\mathbf{I} + \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R})]\mathbf{q}_t,$$

majd bevezetve az $\mathbf{M} = \mathbf{I} + \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R})$ jelölést, a

$$\mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{M}\,\mathbf{q}_t \tag{33}$$

egyenlet adódik. A (33) diszkrét idejű dinamikai rendszer megoldásainak pályája az $\mathbf{M}$ mátrix sajátértékeiből, a hozzájuk tartozó sajátvektorokból, valamint a kezdőértékekből olvasható le.
Általában $\mathbf{M}$ sajátértékei komplexek és a (33) rendszer megoldásai közgazdaságilag nehezen értelmezhetők. Néhány feltétellel azonban biztosítható,

hogy $\mathbf{M}$-nek legyen pozitív sajátértéke és az ahhoz tartozó sajátvektor komponensei is pozitívak legyenek. Egy ilyen feltételrendszer [120, 510. o.] a következő:

- létezik olyan $\mathbf{q} \geq 0,\ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, hogy $(\mathbf{I} - \mathbf{R})\,\mathbf{q} > 0$;
- $(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{B}$ irreducibilis[12] (indekompozábilis).

Ekkor teljesülnek az alábbiak:

- az $(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{B}$ mátrixnak létezik maximális sajátértéke, $\mu > 0$, és a hozzá tartozó sajátvektor $\mathbf{u} > 0$;
- $\rho = \frac{1}{\mu}$ sajátértéke a $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R})$ mátrixnak, az $\mathbf{u} > 0$ sajátvektorral;
- $1 + \rho > 0$ sajátértéke $\mathbf{M}$-nek, a hozzá tartozó sajátvektor $\mathbf{u} > 0$.

Mivel $1 + \rho$ sajátértéke $\mathbf{M}$-nek, a hozzá tartozó sajátvektor $\mathbf{u}$, a (33) dinamikai rendszer $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$-ből induló megoldása:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_0 &= \mathbf{u}, \\
\mathbf{q}_1 &= (1+\rho)\mathbf{q}_0 = (1+\rho)\mathbf{u}, \\
\mathbf{q}_2 &= (1+\rho)\mathbf{q}_1 = (1+\rho)^2\mathbf{u}, \\
&\vdots \\
\mathbf{q}_t &= (1+\rho)\mathbf{q}_{t-1} = (1+\rho)^t\mathbf{u}, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

A (32) modell felírásakor az általános dinamikus változatból indultunk ki, most azonban arra a speciális esetre jutottunk, amikor a technológiai feltételek és az ágazati arányok időben állandók, azaz a modell **stacionárius**.

Tekintsük ismét a növekedési mátrix (30) definícióját. A stacionárius esetben explicit módon fel tudjuk írni a kibocsátás-változásokat:

$$
\begin{aligned}
\triangle q_{i,t} &= q_{i,t} - q_{i,t-1} = (1+\rho)^t u_i - (1+\rho)^{t-1} u_i = \rho(1+\rho)^{t-1} u_i, \\
q_{j,t} &= (1+\rho)^t u_j.
\end{aligned}
$$

[12] Egy $\mathbf{A}$ mátrix *reducibilis*, ha sorainak és oszlopainak átrendezésével $\begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_{22}} \end{pmatrix}$ alakra transzformálható. Ellenkező esetben a mátrix *irreducibilis*.

A $\mathbf{G}_t$ mátrix (i,j)-edik eleme tehát:

$$\frac{\triangle q_{i,t}}{q_{j,t}} = \frac{\rho(1+\rho)^{t-1}u_i}{(1+\rho)^t u_j} = \frac{\rho}{1+\rho}\,\frac{u_i}{u_j},$$

$$\mathbf{G}_t = \tfrac{\rho}{1+\rho}\begin{pmatrix} 1 & u_1/u_2 & \dots & u_1/u_n \\ u_2/u_1 & 1 & \dots & u_2/u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n/u_1 & u_n/u_2 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

A (31) egyenletben szereplő $\mathbf{Q}_t$ mátrixhoz hasonlóan ismét egy konzisztens páros összehasonlítás mátrixhoz jutottunk, amely ρ-val és a kibocsátások $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ vektorának komponenseivel írható fel. Vegyük észre, hogy a stacionaritás következményeként $\mathbf{G}_t$ nem függ t-től, azaz időben állandó, a növekedési ráta pedig a (31) egyenlet jelölésével $\overline{g} = \frac{\rho}{1+\rho}$.

A gyakorlati példákban a fenti formulák általában csak jó közelítéssel teljesülnek. Noha a $\mathbf{G}_t$ mátrix rangja nem is mindig 1, a domináns sajátértéktől különböző sajátértékek általában nagyon közel vannak a 0-hoz.

Kutatási irányok

Mind Stojanović, mind Steenge a növekedési elemzések új irányzataként említi a növekedési mátrix alkalmazását. Véleményem szerint Steenge dolgozatai kiváló példái annak a tudományos hullámnak, amelyet Saaty 1980-ban megjelent alapműve [106] váltott ki.

Az általam ismert szakirodalomban mindenesetre eddig kevés próbálkozást találtam a továbblépésre. Steenge [116] az ikertermékek esetére is felírta a növekedési mátrixot páros összehasonlítás mátrix alakban, Farkas és Rózsa [39] pedig a páros összehasonlítás mátrixok egy speciális szerkezetű perturbált változatának sajátérték-meghatározásán keresztül vont le következtetéseket a (33) dinamikai rendszer stabilitására vonatkozóan.

7. Alkalmazás: Banki projektek rangsorolása

Ebben a fejezetben a többszempontú döntési modellek egy gyakorlati alkalmazását mutatom be. A 4. és 5. fejezetekben már tárgyalt **szempont-súlyok meghatározása** mellett **az alternatívák szempontok szerinti értékelésé**re mutatok konkrét példákat. Mint látni fogjuk, az alternatívák nagy száma miatt automatikus értékelési mechanizmus kidolgozására volt szükség, melyet **hasznossági függvények** megadásával oldottunk meg.

A feladatot egy nemzetközi bank magyarországi részlege (továbbiakban Bank) megbízásából az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Osztályán (továbbiakban Osztály) végeztük el 2001/2002-ben [S-4]. A csoport tagjai közül az értekezés szerzőjének feladatai az alábbiak voltak:

- a szempontrendszer kidolgozásában való részvétel;
- a Bank felsővezetése és szakértői által kitöltött páros összehasonlítás mátrixok alapján a szempontsúlyok meghatározása;
- az alternatívák szempontok szerinti értékelési mechanizmusának kidolgozása hasznossági függvények megadásával a Bank képviselője által megadott instrukciók alapján;
- a Bank által korábban alkalmazott és az általunk javasolt módszertanok összehasonlításában való részvétel; és
- az Expert Choice szoftver alkalmazhatósági területének körülhatárolása.

Az általunk javasolt módszertan 2002 óta segíti a Bank munkáját projektjeik rangsorolásában, eredményességéről írásbeli referenciát kaptunk.

A fejezet felépítése a következő: a előzményeket és az kidolgozandó módszertanra vonatkozó elvárásokat bemutató bevezetés (7.1.) után a döntési feladat felépítésének (7.2.) és megoldásának lépései (7.3.) követik. A fejezetet a bankban korábban alkalmazott és az általunk javasolt módszertanok összehasonlítása (7.4.) és a tapasztalatok (7.5.) zárják.

7.1. Bevezetés

A cél a banki projektek egységes szempontrendszer alapján történő rangsorolásának döntési modelljét, valamint a szoftveres megvalósítás bizonyos mértékű előkészítését kidolgozni. Az erre vonatkozó **elvárások** az alábbiak:

- a döntéshozatal folyamata pontosan definiált és írásban rögzített legyen;
- a döntéshozók csak a saját kompetenciájukba tartozó szempontok szerint értékeljenek;
- a szempontok változtathatóak legyenek;
- az eljárás alkalmazásával a projektek egyértelmű fontossági sorrendje adódjék;
- a döntéshozóktól kezelhető mértékű együttműködést várjon el;
- a rangsorolás folyamata új elem bekerülésével megismételhető legyen (a korábbi minősítések és döntések felhasználásával);
- az eljárás a banki belső erőforrásokkal üzemeltethető legyen;
- a projektek (alternatívák) átlagos száma 50-100;
- a minősítési szempontok száma 15-25.
- a korábbi rangsorolási eljárás és az új szakértői rangsorolási eljárás eredményeinek eltérését meg kell vizsgálni és a kapott következtetéseket a döntési módszer finomításakor felhasználni.

Előzmények:

A Bank munkatársai előzetesen összeállították a minősítési szempontokat, valamint meghatározták azok értékelési és súlyozási rendjét. Ezt a rendszert egy kompetencia-független minősítő eljárás keretében alkalmazták, amelynek eredményét elemezni szeretnénk. A Bank rendelkezik továbbá egyfelhasználós Expert Choice (EC 2000 Professional 10.1 Build 903.04) döntéstámogató szoftverrel.

A munka során elvégzendő feladatok:

I. A fenti elvárásokat és előzményeket figyelembe véve a döntési modell felépítése a szempontok rendszerén, az alternatívák megadásán és a döntéshozók kiválasztásán és kompetenciáik meghatározásán keresztül.

II. A döntési feladat megoldásának kidolgozása mind az egyéni, mind a csoportos döntési mechanizmus vonatkozásában.

Ez az **egyéni** döntési mechanizmuson belül:
– a szempontok súlyozását;
– az alternatívák szempontok szerinti értékelését (hasznossági függvényekkel);
– a súlyok és értékelések aggregálását;
– az alternatívák rangsorának érzékenységvizsgálatát;

a **csoportos** döntési mechanizmuson belül pedig:
– a szempontok csoportos súlyainak meghatározását;
– a döntéshozók kompetencia-súlyainak meghatározását;
– az alternatívák csoportos értékelésének meghatározását;
– a csoportos súlyok és a csoportos értékelések aggregálását;
– az alternatívák végső rangsorának érzékenységvizsgálatát;
– az eredmények vizualizálását és értékelésének módját jelenti.

Feladatunk továbbá megvizsgálni a döntési modell dinamikus változtatásának lehetőségeit, a szoftveres megvalósítás és annak a banki belső erőforrásokkal való üzemeltethetőségét.

III. A Bank által biztosított mintafeladatokon be kell mutatni a javasolt módszertan működőképességét, a korábbi és az általunk javasolt módszertan és az általuk adott eredmények összevetését.

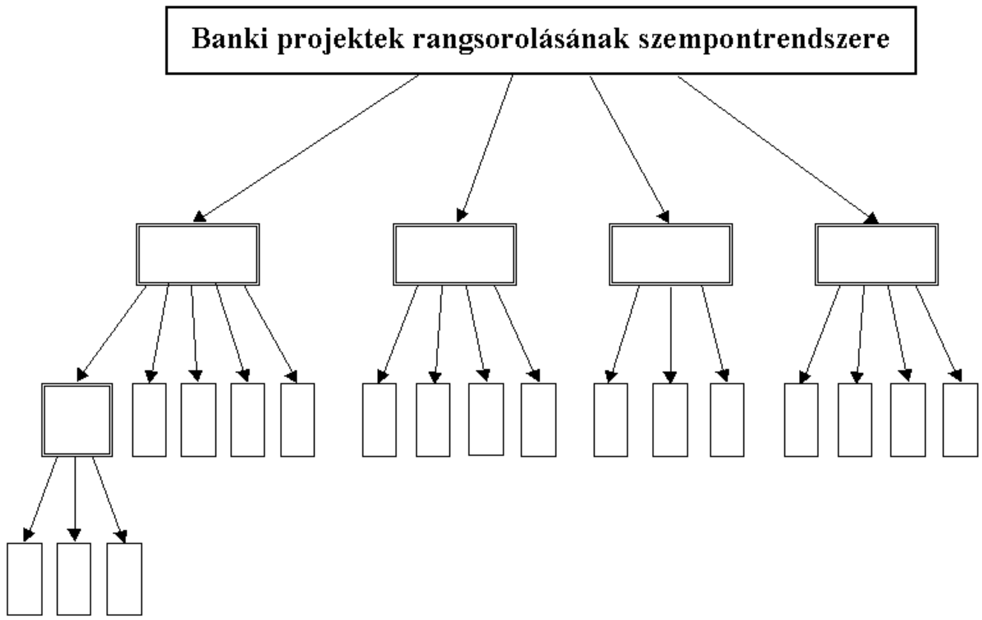
IV. Javaslatot kell adni a döntési modell megoldásának szoftveres támogatására, kiemelten kezelve az Expert Choice alkalmazhatóságának vizsgálatát.

7.2. A döntési feladat felépítése

7.2.1. A döntési szempontok meghatározása

A Bank szakembereinek írásbeli javaslatai és az Osztály korábbi tapasztalatai alapján meghatároztuk a döntési eljárás során figyelembe veendő szempontokat. A szempontok struktúrába rendezésére a többszintűséget és áttekinthetőséget lehetővé tevő faszerkezetet (20. ábra) találtuk alkalmasnak. Ez egyrészt jól illeszkedik a döntési eljárás lépéseihez (pl. súlyozás), másrészt elősegíti a projekt-javaslatok pontosabb kidolgozását. A fő cél a banki projektek rangsorolása, ennek 4 főszempontját határoztuk meg, a főszempontok pedig további alszempontokra bomlanak. A döntési modellben 17 levélszempont [13] szerepel.

[13] A szempontok nevét és pontos leírását a Bankkal kötött szerződésnek megfelelően nem részletezzük.



20. ábra *A banki projektek rangsorolásának szempontrendszere*

A szempontok az értékelésben fontos szerepet játszó tulajdonságaik alapján további két csoportba oszthatók: *objektív* és *szubjektív.* Objektív egy szempont, ha a projekt leírásában szereplő tények és adatok alapján egyértelműen megítélhető. Az objektív szempontok szerint történő értékelés az előre meghatározott szabályok alapján történik, vagyis nem igényel további döntéshozói közreműködést. A szubjektív szempontok szerinti értékelést az egyes szakterületen jártas szakemberek véleményére alapozzuk.

7.2.2. A döntési alternatívák megadása

A Banktól kapott projekt-javaslat minták szerkezetét a szempontrendszerhez igazítottuk. Ehhez a projekt-javaslatokban szereplő információk egy részét át kellett csoportosítani, illetve olyan hasznos adatokat, amik a minta változatban nem szemponthoz kapcsolódva jelentek meg, a megfelelő szemponthoz rendeltük. Az így módosított projekt-javaslatok szerkezeti felépítése két részre bontható:

1. Projekt definíció: a projektre vonatkozó fontosabb információk, amik hozzátartoznak a projekt bemutatásához, de szempontként nem sorolhatók be a szempontfa csomópontjai közé:

- a téma felmerülésének alapja, oka, előzmények;
- projekt produktum rövid bemutatása, az elérendő célok;
- projekt szerepek, felhasználók, más érdekeltek megnevezése;

- határidő, időigény;
- eredmények.

2. A projektek szempontok szerinti leírása: a szempontfa strukturált felépítésének megfelelően történik. Az objektív szempontok szerinti értékeléshez feltétlenül szükséges, hogy a hozzájuk tartozó adatok minél pontosabban legyenek megadva. A szubjektív szempontok esetében pedig a banki szakemberek mint döntéshozók előtt minden szükséges információnak szerepelnie kell, hiszen ezek alapján történik az értékelés. Az értékeléshez szükséges támpontokat a banki szakemberek által kidolgozott projekt-javaslatok alapján a Bank képviselőjével közösen állapítottuk meg.

7.2.3. A döntéshozók kiválasztása

A banki projektek rangsorolására kidolgozott döntési modellben a döntéshozók két csoportját különböztetjük meg.

Az első csoportba a felsővezetés tagjai tartoznak, akik a döntési eljárás kezdetén a főszempontok súlyainak meghatározásával megadják a döntés irányát, majd az egyes rangsorolási folyamatok végeztével a banki projektek javasolt rangsorát – esetleges változtatásokkal – véglegesítik.

A döntéshozók második csoportjába azok a szakemberek tartoznak, akik feladata a döntési eljárás elején a főszempontok alá tartozó alszempontok súlyainak megadása. Az egyes rangsorolási eljárások során pedig az alternatívák (projektek) értékelését végzik azon szempontok szerint, melyek az ő kompetenciájukba tartoznak. E második döntéshozói csoport tagjait a főszempontokhoz rendeljük hozzá úgy, hogy minden főszemponthoz legalább három döntéshozó tartozzon. Ezáltal lehetővé válik a többszempontú csoportos döntési modellek alkalmazása a banki projektek rangsorolására.

A döntéshozók konkrét kiválasztását a Bank által rendelkezésünkre bocsátott szervezeti struktúra felhasználásával végeztük el.

7.3. A döntési feladat megoldása

A döntési feladat megoldása az egyéni döntések meghozatalán keresztül a csoportos döntések eredményeinek kiszámítását jelenti. Először áttekintjük az egyéni döntéshozatal legfontosabb lépéseit.

7.3.1. Egyéni döntések

Az egyéni döntéshozatal fázisai a szempontok súlyozása, az alternatívák értékelése az egyes szempontok szerint, az értékelések szempontsúlyokkal vett aggregálása, majd az érzékenységvizsgálat.

1. A szempontok súlyozása

A döntési folyamat végeredményét alapvetően befolyásoló tényező a szempontok súlyelosztása. A döntési feladat célja a szempontfa gyökerének felel meg. Az ebből leágazó főszempontok súlyai jelölik ki a döntés irányát, mely lényegében a felsővezetés stratégiájának számszerűsített megjelenése. Minden szempont súlya a neki alárendelt alszempontok súlyaira bomlik, ily módon az összes levélszempont globális súlyának összege pontosan a gyökérszempont súlyát adja vissza, melyet megegyezés szerint 1-nek vagy 100%-nak veszünk. Egy szempont alszempontjait viszont sokkal könnyebb és szemléletesebb lokálisan súlyozni, vagyis ha a szülő szempont súlyát 100%-nak vesszük, az hogyan oszlik meg az alszempontok között. Az egy csúcsból leágazó alszempontok globális és lokális súlyvektora tehát csak egy skalárral való szorzóban tér el.

A szempontok súlyozását vagy közvetlenül, szubjektív döntésként adhatják meg a döntéshozók, vagy közvetve, páros összehasonlítások útján. Munkánk során a főszempontok súlyozására a 4.1. alfejezetben bevezetett páros összehasonlítások módszerét alkalmaztuk. A páros összehasonlítás mátrix elemei a szempontfa egy azonos szintjén levő szempontok fontosságainak arányai.

2. Az alternatívák értékelése az egyes szempontok szerint

Az alternatívák (projektek) értékelése minden szempont szerint a 0-100-as skálán történt, ahol a 0 minden esetben a leggyengébb teljesítményszintet jelenti, 100 pedig a legjobbat. Az alternatívák értékelése különböző módon történik az objektív és a szubjektív szempontok esetén.

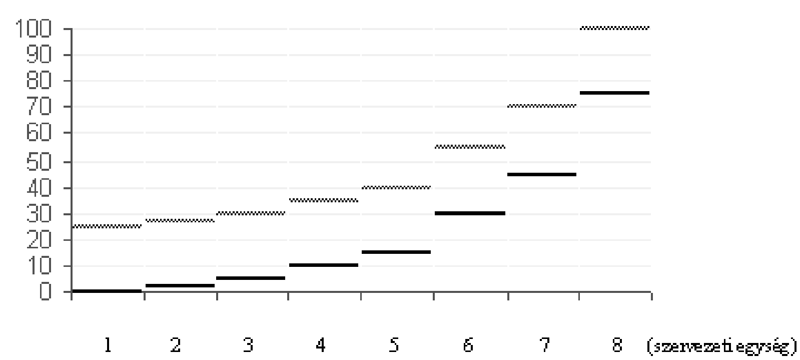
Objektív szempontok

Az értékelés a projekt leírásában szereplő tények és adatok alapján történik. A Bank képviselőjével történt konzultációk során meghatároztunk hasznossági függvényeket (az értékelés szabályrendszerét), amelyek által egyértelműen, – a döntéshozók idejét kímélve – automatikusan számíthatók a projektek pontszámai.

Példa objektív szempontra

A szempontok között szerepel a *szervezeti kiterjedtség*, ami a projekt megvalósításában bevonásra kerülő szervezeti egységek számát jelenti. Minél több egység működik közre a projekt lebonyolításában, annál nagyobb prioritást élvez. A szempont szerinti pontozást a Bank szakértőinek javaslatai alapján a következőképpen határoztuk meg (21. ábra):

<table>
<tr><td colspan="2">0</td><td>1 szervezeti egységen belül megvalósított projekt</td></tr>
<tr><td colspan="2">exponenciális
2-75</td><td>2 és 8 közötti szervezeti egységet érint</td></tr>
<tr><td rowspan="7"></td><td>2</td><td>2 szervezeti egységen belül megvalósított projekt</td></tr>
<tr><td>5</td><td>3 szervezeti egységen belül megvalósított projekt</td></tr>
<tr><td>10</td><td>4 szervezeti egységen belül megvalósított projekt</td></tr>
<tr><td>15</td><td>5 szervezeti egységen belül megvalósított projekt</td></tr>
<tr><td>30</td><td>6 szervezeti egységen belül megvalósított projekt</td></tr>
<tr><td>45</td><td>7 szervezeti egységen belül megvalósított projekt</td></tr>
<tr><td>75</td><td>8 szervezeti egységen belül megvalósított projekt</td></tr>
<tr><td colspan="2">+25</td><td>Ha külső együttműködő is van</td></tr>
</table>



21. ábra *Hasznossági függvény egy objektív szempont szerinti értékelésre (pontozásra)*

A résztvevő szervezeti egységek számának függvényében 0 és 75 közötti pontszámok adhatók. Az egységek száma és az adott pontszám közötti kapcsolat nem lineáris, hanem lankásan induló, a nagy értékekre meredeken felfutó függvénnyel, jelen esetben az exponenciálissal írható le. Ez azzal magyarázható, hogy a Bank számára nem az 1-2 szervezeti egység részvétele az elsődleges fontosságú, hanem az, hogy minél több (maximálisan 8) egységet érintsen. A külső együttműködő részvételét 25 ponttal értékeljük, így válik teljessé a teljes 0-100-as pontozási skála.

Szubjektív szempontok

A szubjektív szempontok esetében nem támaszkodhatunk számszerű adatokra, így az értékelést a döntéshozói szakvéleményekre alapozzuk. Annak érdekében, hogy az értékelő csoport tagjainak véleményét aggregálni lehessen, minden szubjektív szempontra bevezettünk értékelési támpontokat. A projekt minimálisan 0, maximálisan 100 pontot kaphat, e két kategóriához minden esetben megfogalmazható valamilyen verbális leírás. A köztes értékekre olyan definíciókat határoztunk meg, amelyek segítik a döntéshozót az értékelésben.

Példa szubjektív szempontra

Szubjektív szempontra tipikus példa a *kockázat*. A kockázat mint fogalom önmagában túl általános, ezért 6 kockázattípust definiáltunk, melyek közül kettőt ismertetünk:

Alvállalkozók:
Nincs, illetve időre nem áll rendelkezésre megfelelő beszállító;
Visszalép, szerződést bont;
Rosszul teljesít;
Túl sok alvállalkozó van a projektben.

Tervezés:
Hiányos felhasználói igényfelmérés;
Nem megfelelő specifikáció;
Felhasználói igények változása;
Időben kötött tevékenységek száma túl kevés vagy túl sok.

Egy adott projektnél mérlegelni kell, hogy mely kockázattípusok merülhetnek fel és milyen erősséggel:

- kockázatmentes;
- kis kockázat;
- közepes kockázat;
- jelentős kockázat;

- nagy kockázat.

E mérlegelés után kialakul egy általános kép arról, hogy mennyire tekinthető kockázatosnak az adott projekt. 0 pontot kap a projekt, ha akár egy kockázattípus szerint is nagy kockázattal jár, vagy legalább kettő típus szerint jelentős kockázatú. 100 pontot kap, ha abszolút kockázatmentes. A köztes pontszámok egyéni megítélés szerint adandók, a következő táblázat figyelembevételével:

Pont	*Támpontok*
0	Legalább egy típus szerint nagy kockázatú, vagy legalább két típus szerint jelentős kockázatú.
20	Egy típus szerint jelentős kockázatú, vagy két típus szerint közepes kockázatú.
40	Egy típus szerint közepes kockázatú, vagy két típus szerint kis kockázatú.
60	Összességében kis kockázattal jár.
80	Nem teljesen kockázatmentes, de összességében minimális kockázattal jár.
100	Minden típus szerint kockázatmentes.

6. táblázat *Támpontok a* ***kockázat*** *(szubjektív) szempont szerinti értékeléshez*

3. A súlyok és az értékelések aggregálása

A projektek értékeléseinek a szempontok fontosságaival mint súlyokkal vett aggregálására a súlyozott számtani közepet választottuk. Ez közvetlenül illeszthető a szempontfa súlyrendszeréhez, másrészt szemléletesen tükrözi az értékelések és súlyok jelentését és jelentőségét.

4. Az alternatívák rangsorának érzékenységvizsgálata

A többszempontú döntési feladatok megoldásának egyik legfontosabb lépése az érzékenységvizsgálat, amelyben az alternatívák rangsorának stabilitását vizsgáljuk adott paraméterek változásának függvényében. A gyakorlati feladatok többsége ugyanis tartalmaz némi bizonytalanságot mind az adatok, mind a súlyokat illetően. Az érzékenységvizsgálat arra a kérdésre keresi a választ, hogy mekkora mértékű bizonytalanságot (zajt) bír el a kialakult rangsor. Az általunk használt érzékenységvizsgálat [83] specialitása, hogy az összes döntési paraméter egyidejű változása mellett használható.

7.3.2. Csoportos döntések

A csoportos döntési feladat megoldása során olyan végeredményt (jelen esetben rangsort) keresünk, amely hűen tükrözi a csoport tagjainak összesített véleményét. A döntéshozók kompetencia-súlyainak megadásával először a szempontok csoportos súlyait határozzuk meg az egyéni döntésekből származó szempontsúlyok alapján, majd ezeket felhasználva az egyéni értékelésből a csoportos értékeléseket.

1. A döntéshozók kompetencia-súlyainak megadása

Az eltérő szakterületekből és döntési jogkörökből adódóan a döntéshozói véleményeket különböző súlyokkal kell figyelembe vennünk. Ennek érdekében a főszempontokhoz már eleve kijelöltünk döntéshozói csoportokat, némely főszempont azonban önmagában is elég összetett ahhoz, hogy az azon belüli szakterületek specialistái kiemelt súlyt kapjanak.

Javaslatunk szerint a döntéshozók szempont-súlyozásra és alternatíva-értékelésre vonatkozó kompetencia-súlyait a döntésekért felelős vezetők határozzák meg. A modellünk lehetővé teszi azt, hogy a kompetencia-súlyok rejtve maradjanak, amely kizárja az ebből fakadó személyes konfliktus lehetőségét, másrészt védelem az esetleges manipulációs kísérletekkel szemben is.

2. A szempontok csoportos súlyainak meghatározása

A szempontok fontosságára az egyéni döntéshozók által megadott információk alapján, a döntéshozók kompetencia-súlyainak figyelembe vételével kiszámíthatók a szempontok csoportos súlyai.

3. Az alternatívák csoportos értékeléseinek meghatározása

A szempontfa csoportos súlyozásának és a döntéshozók kompetencia-súlyainak ismeretében csak a levélszempontokra kell csoportos értékeléseket kiszámolni. A levélszempontok szerinti egyéni értékelések döntéshozói kompetenciasúlyokkal vett összegeként adódik az alternatívák csoportos értékelése.

4. A csoportos súlyok és a csoportos értékelések aggregálása

Az alternatívák végső rangsorát a csoportos értékelések csoportos súlyokkal vett összegeként kapjuk. Ez a számítás módját tekintve megfelel az egy döntéshozós többszempontú döntési feladatnak.

5. Az alternatívák csoportos rangsorának érzékenységvizsgálata

A csoportos döntéshozatal végeredményét jelentő rangsor ugyanolyan jellegű döntési paraméterektől függ, mint az egyéni döntések rangsorai. Ezek a paraméterek: a szempontok csoportos súlyai, az alternatívák szempontok szerinti csoportos értékelései, valamint a döntéshozók kompetencia-súlyai. A rangsor robusztusságának vizsgálatára alkalmazható a WINGDSS szoftver érzékenységvizsgálati modulja [25, 83].

6. Az eredmények vizualizálása és értékelése

A végső döntések meghozatalakor a vezetőknek általában nincs idejük arra, hogy a döntési folyamat minden részletét áttekintsék. Ehelyett az információk egy nagymértékben tömörített változatát látják, amely szükséges és elegendő ahhoz, hogy a probléma lényegi tulajdonságait bemutassa. A többszempontú döntési feladatok vizualizálása – különösen a nagyméretű problémák esetében – jelenleg is kutatás tárgya.

7.4. A bank által korábban alkalmazott és az általunk javasolt módszertanok összehasonlítása

Mindkét döntési eljárás ugyanazon alapelvekre épül. A döntési feladat felépítésében történő **különbségek** az alábbiak:

- A szempontok egy szinten való szerepeltetésétől eltérően a szempontfába való rendezést javasoltuk. Ez lehetővé teszi a fő szempontcsoportok kiválasztását, a döntéshozók szerepének pontosabb leírását, valamint az alternatívák szempontok szerinti értékelésének pontosítását.

- A javasolt eljárásban a szempontokhoz a közvetlenül megadott súlyok helyett – a szempontok fastruktúrájának megfelelően – lokális súlyokat, a lokális súlyokból rekurzív módon számítható globális súlyokat rendeltünk.

- A pontozás megbízhatóságát növelendő, megkülönböztettünk objektív és szubjektív szempontokat. Az objektív szempontok szerinti kiértékelést hasznossági függvények segítségével végezzük.

Az általunk javasolt módszertan **újdonságai** a következők:

- A főszempontok súlyozását a felsővezetők végzik, így ők határozzák meg a döntés irányát.

- A főszempontok alá tartozó alszempontok súlyozását a főszempontcsoportokhoz rendelt szakértők végzik.
- A döntéshozók szakértelmét a csoportos döntéshozatal során kompetencia-súlyokkal különböztetjük meg.
- A levélszempontok szerinti csoportos értékelések meghatározása a kompetencia-súlyok figyelembevételével történik.
- A döntési folyamatot hatékony érzékenységvizsgálat egészíti ki.

7.5. Tapasztalatok

A döntéstámogatásnak az üzleti életben betöltött szerepével kapcsolatosan fontosnak tartom hangsúlyozni, hogy mind a modellezés, mind a mintafeladatok megoldása elvégezhető volt olyan, az adatok bizalmas kezelésére vonatkozó szigorú szabályokkal rendelkező intézményi keretek között, mint a bank. A döntési modell felépítéséhez tehát nem feltétlenül kell ismerni az alternatívák értékelésére, a döntéshozók szavazóerőire vonatkozó adatatokat.

Az általunk javasolt módszertan továbbá magában foglalja a projektrangsorolás titkosított megvalósításának lehetőségét is. Ez azt jelenti, hogy a projektek leírásából csak az értékeléshez feltétlenül szükséges adatok láthatók a döntéshozatal egyes fázisai során, másrészt a döntéshozók kompetencia-súlyai is lehetnek titkosak.

A banki projektek rangsorolására javasolt módszertan a bevezetése után három évvel kapott információk szerint beváltotta a hozzá fűzött reményeket. A Bank szakértője elégedettségét fejezte ki a modell napi gyakorlatban való működőképességét illetően. A tapasztalatok szerint a szempontfa súlyrendszerének megváltoztatására – amit a modell lehetővé tesz, – azóta sem volt szükség.

8. Modellezés: Döntési feladatok az Agyfarmban

Második példánk az internet világából származik. Megmutatjuk, hogy a kommunikáció és tudásszervezés területén felmerülő problémák jelentős része felírható többszempontú döntési problémaként. A döntési feladatokban megfogalmazott célokat **a szempontok helyes megválasztásával és súlyozásával**, valamint **az alternatívák szempontok szerint történő értékelésére adott mechanizmusok** segítségével közelítettük meg. A szempontok súlyozására a 4. és 5. fejezetekben szereplő **páros összehasonlítások módszerét** alkalmaztuk, az értékelésre pedig számszerűsített **hasznossági függvény-konstrukciók**at adtunk meg.

Az AGYFARM modellezése a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Média Oktató és Kutatóközpontja (BMGE-MOKK), az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Osztálya, és a Frutta Elettronica közös együttműködésében készült.

Az MTA SZTAKI által elvégzett feladatok közül a következők megoldásában vettem részt:

- a döntési problémaként kezelhető feladatok azonosítása és modellezése;
- az egyes többszempontú döntési problémák szempontrendszerének kidolgozása;
- a szempontok szerinti értékelések meghatározása hasznossági függvények konstrukciójával;
- a szempontsúlyok kiszámítása páros összehasonlítás mátrixok alapján;
- az Agyfarmban szereplő felhasználói profilok ill. értékelések hasonlóságának mérésére szolgáló lehetőségek áttekintése.

A fejezet szerkezeti tagolása a következő: a bevezető alfejezetet (8.1.) az Agyfarm legfontosabb fogalmai (8.2.) követik, majd a 8.3. alfejezetben az ajánlási feladatokat fogalmazzuk meg többszempontú döntési feladatként, majd javaslatot adunk a megoldásra. A fejezetet rövid összegzés és a gyakorlati alkalmazás szempontjából fontos tapasztalatok zárják.

8.1. Bevezetés

Az AGYFARM az akadémiai kutatás kollaboratív kommunikációs és tudásszervezési modellje on-line technológiai környezetben.

A probléma-orientált, multidiszciplináris és intézményközi kutatások egyik fő akadálya, hogy az akadémiai szféra intézményi szerkezete a korábbi modellnek megfelelően diszciplinárisan tagolt. Ez a struktúra a kutatók számára nem teszi láthatóvá a hasonló vagy összefüggő problémákkal foglalkozó, más tudományágakban folyó kutatásokat, eredményeket, és nem segíti elő a kutatók közötti kapcsolatfelvételt sem. Ezért meg kell vizsgálni a virtuális struktúrák szerepét. Ehhez egy lépés az akadémiai kutatás kollaboratív kommunikációs és tudásszervezési modelljének kifejlesztése on-line technológiai környezetben. Ezen belül fontos tudományos célkitűzés:

- hatékony kollaboratív értékelő és tartalom ajánló rendszer kidolgozása,
- az *off-line* és *on-line* közösségekben működő visszacsatolási mechanizmusok vizsgálata,
- a visszacsatolási mechanizmusoknak a közösségek spontán önszerveződésében játszott szerepének vizsgálata.

A felhasználói kezelőfelületnek a lehető legpontosabb képet kell mutatnia a közösségek és tartalmak aktuális helyzetéről és összefüggéseiről. A rendszer hátterében működő tartalomértékelő, szűrő és ajánló mechanizmusok az egyes felhasználók *on-line* viselkedéséből származó releváns információk állandó visszacsatolásával a felhasználók közösségeinek és érdeklődésének változásával dinamikusan együtt változó, tanuló, felhasználói interfészt kell hogy adjanak.

A különbség a ma ismert portálok és az itt javasolt megoldás között az, hogy a hagyományos honlapok, fórumok vagy kommunikációs aktusok között fennálló logikai és tartalmi kapcsolatok nem válnak automatikusan láthatóvá; a kapcsolatok egyértelmű és világos *on-line* reprezentációja a rendszer önálló működése helyett az adott oldalak, fórumok alkotói és fenntartóinak személyes ismeretségeitől, ismereteitől és szándékaitól függ.

Az Agyfarm szofisztikált kommunikációs infrastruktúrával nyert tartalmak publikálására, rendszerezésére alkalmas szolgáltatás.

Az Agyfarm legfőbb elemei:

- a felhasználók;
- a felhasználók által létrehozott üzenetek;
- a felhasználók által publikált dokumentumok;
- az üzenetek és dokumentumok közzétételére szolgáló témaoldalak, melyeket egyes felhasználók vagy azok csoportjai hoznak létre.

Az Agyfarm szolgáltatás kollaboratív értékelő és ajánló rendszerének feladata, hogy a fenti információforrásokat egy rendszerbe integrálva biztosítsa a következő lehetőségeket:

- képes egy felhasználó viselkedését, értékeléseit elemezve számára
  - más felhasználókat,
  - témaoldalakat,
  - dokumentumokat, tartalmakat

  ajánlani.
- kapcsolatteremtés a felhasználók, dokumentumok és témaoldalak között;
- a hasonlóan viselkedő, azonos értékeket valló, hasonló érdeklődésű felhasználók csoportként való azonosítása, és ezen információ visszacsatolása a rendszerbe.

A rendszer egyik célja tehát a felhasználókról, a dokumentumokról és a témaoldalakról profil kialakítása és e profilok segítségével a felhasználók közötti csoportképződés elősegítése. Ezek a fő célkitűzések, melyek konkrét megvalósítási javaslatait a fejezet további részében tekintjük át.

8.2. Fogalmak

8.2.1. Kulcsszavak

A kulcsszavak: egy a felhasználók tevékenységéből táplálkozó, organikusan fejlődő, szerkesztőbizottság által karbantartott, ellenőrzött és gondozott szólista. A kulcsszavak célja, hogy tömören és az automatikus ajánló rendszer által is kezelhető módon azonosítson szakmai területeket.

8.2.2. Felhasználók

A felhasználói profil a kulcsszavakból és az aktivitásból áll össze. Tekinstsük először a kulcsszavakat.

Minden felhasználót jellemez néhány kulcsszó, amik a meghatározó kutatási vagy érdeklődési területeket jelzik. A lehetséges kulcsszavak nagy száma miatt és a megfelelő döntési módszertan alkalmazását célul kitűzve érdemes súlyozást bevezetni. A súly nagysága megmutatja egy adott K kulcsszó esetén az **F** felhasználóhoz való „tartozás" mértékét. Jelölése: $W_{\mathbf{F},K}$.

A súly lehet a gyakoriság és a relatív gyakoriság mutatója is. A relatív gyakoriság számítására akkor van szükség, ha vannak olyan kulcsszavak, amelyek leíró ereje lényegesen nagyobb más kulcsszavakkal összevetve. A relatív gyakoriság abból számítható, hogy egy adott kulcsszó egy adott témakörhöz tartozó összes tartalom közül hánynak kulcsszava. Ha szinte mindegyiknek, akkor a gyakoriság és relatív gyakoriság közel azonos, míg ha csak kevésnek kulcsszava, akkor az adott kulcsszót erősen specifikusnak nevezhetjük, így a relatív gyakorisága lényegesen nagyobb lesz.

Elsődleges kulcsszavak: A felhasználó által a regisztráció során megadott kulcsszavak. Ide tartoznak az alapművek, alapszerzők, mint speciális kulcsszavak is. Ezen értekezés szerzőjének kulcsszavai között például a „többszempontú döntési modell", „páros össszehasonlítás mátrix", „hasznossági függvény" kulcsszavak szerepelnének.

Másodlagos kulcsszavak: Azon kulcsszavak, amelyeket a felhasználó nem közvetlenül adott meg, de aktivitása során (miket olvas, ír, szerkeszt) szorosabb kapcsolat állapítható meg. Ha egy másodlagos kulcsszó gyakorisága elér egy szintet, akkor a rendszer felajánlja a felhasználónak a kulcsszó felvételét az elsődleges listára.

A kulcsszavak a felhasználók profiljaiban is jelen vannak, a kulcsszavak gyakorisága dinamikusan követi a felhasználó aktivitását. Ez teszi lehetővé, hogy a rendszer képes legyen megtanulni, hogy a felhasználó mit szeret és mit nem.

Az **F** felhasználó tehát az $\mathbf{F} = (W_{\mathbf{F},K_1}, W_{\mathbf{F},K_2}, \dots, W_{\mathbf{F},K_n}) \in \mathbb{R}^n_+$ vektorral jellemezhető, ahol az i-edik koordináta a K_i kulcsszóhoz tartozó súly és $\mathbb{R}^n_+$ az n-dimenziós Euklideszi tér pozitív ortánsát jelenti.

A felhasználói profil második összetevője az aktivitás, melynek három szintjét különböztetjük meg:

- olvasás (legalább kétszer),
- adminisztráció/tisztségviselés,
- létrehozás.

A fenti aktivitás-szintek témaoldalanként általában különböznek, és jelentőségüket az adja, hogy a felhasználó profiljában levő kulcsszavak súlyai a felhasználói aktivitástól függően változnak.

8.2.3. Témaoldal

A témaoldal az Agyfarm legfontosabb szolgáltatása, mely lehetővé teszi különböző, előre specifikált, az egyetemi tudástermelés munkafázisához és intézményrendszeréhez illeszkedő funkcionalitású oldalak könnyű és gyors létrehozását, illetve üzemeltetését, melyre minden felhasználó jogosult.

A témaoldalak típusai: *My Agyfarm -, Tematikus gyűjtőoldal, Adminisztrációs -, Ego -, Intézmény -, Ötlet -, Projekt -, Kurzus -, Konferencia -, E-kiadvány -, Publikáció -, Élmény -, Felhasználó által definiált oldal.*

Elsődleges kulcsszavak: Minden témaoldalt el kell látni kulcsszavakkal, hogy azonosítható legyen a tartalma. Ezeket a témaoldal gazdája az oldal létrehozásakor adja meg, és nem változhatnak automatikusan.

Másodlagos kulcsszavak: Azon kulcsszavak, amelyeket a témaoldal adminisztrátora nem közvetlenül adott meg, de a témaoldalon folyó munka (fórumok, dokumentumok) során megjelennek és meghatározó szerepet töltenek be a témaoldal hovatartozásának meghatározásában. A másodlagos kulcsszavak gyakorisága dinamikusan követi a felhasználók aktivitását.

Ha egy másodlagos kulcsszó gyakorisága elér egy szintet, akkor a rendszer felajánlja a témaoldal adminisztrátorának a kulcsszó felvételét az elsődleges listára.

Egy $\mathbf{T}$ témaoldalt leíró $K_1, K_2, \ldots, K_s$ kulcsszavak súlyait a $\mathbf{T} = (w_1, w_2, \ldots, w_s)$ vektorba rendezzük, ahol $w_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, \ldots, s$.

A témaoldalak kulcsszó-súlyai: az oldalhoz kapcsolódó dokumentumok kulcsszavai szerint változnak. Például, ha egy oldalon egyre több *pszichológiá*val kapcsolatos cikk jelenik meg, akkor ez megjelenik az oldal *pszichológia* kulcsszavának súlyában is.

8.2.4. A rendszeridő mint attribútum bevezetése

Az Agyfarm *on-line* célkitűzésének megfelelően szükségesnek tartjuk figyelemmel kísérni az egyes entitásokhoz tartozó rendszeridőt. Ez egyrészt elősegítheti az ajánlások szűrését: pl. ajánljunk-e egy felhasználónak olyan fórum témát, amely kulcsszavai alapján ugyan telitalálat lenne, de már fél éve senki sem szólt hozzá? Másrészt, érdekes vizsgálatokra ad lehetőséget, ha nyomon tudjuk követni egy konkrét témaoldal életpályáját. Mivel a rendszer működése során egyre több új dokumentum jelenik meg, másrészt bizonyos régen megjelent cikkeknek sok esetben már semmi jelentőségük/aktualitásuk sincs, szükség van szűrésre, és erre a rendszeridő bevezetése ad lehetőséget.

A rendszeridő a kulcsszó-vektorok tekintetében

A felhasználó kulcsszavaihoz időt is rendelünk. Egy kulcsszóhoz azt a legutolsó időpontot tároljuk, amikor a felhasználó olvasott, írt, stb. a kulcsszónak megfelelő dokumentumot, vagyis a felhasználó profiljában az adott kulcsszó gyakorisága megváltozott (megnőtt). Ezzel jobban nyomon követhetővé válik az egyes kulcsszavak frissülése, elévülése. Az ajánlásoknál különös tekintettel vagyunk a friss kulcsszavakra. Egy felhasználó valamely kulcsszavát **friss**nek nevezzük, ha az utóbbi időben (pl. 2 hétben) történt a kulcsszóval kapcsolatos esemény részéről.

Az időablak

A rendszeridő alapján történő csoportosításhoz bevezetjük az *időablak* fogalmát. Az automatikus ajánlórendszer működésének hatékonyságához szükséges, hogy el tudjuk különíteni az új tartalmakat, értékeléseket, stb. a régiektől. A legújabbak az első időablakba (melynek hossza paraméter) kerülnek, és minél régebbi egy tartalom, értékelés, kulcsszó, annál nagyobb sorszámú időablakba esik. Az időablakok száma szintén paraméter.

Az idő szerinti automatikus súlycsökkentés

Az Agyfarm működésével és növekedésével szükségszerűen együtt jár, hogy egyre több és több adatot kell tárolni. Bizonyos információk viszont nem szorulnak örökös tárolásra, egy idő után elvesztik jelentőségüket, tehát törölhetők is. Az alábbi területeken javasoljuk az idő szerinti automatikus súlycsökkentést:

- felhasználói profil másodlagos kulcsszavainak súlyai;
- felhasználói profilban szereplő értékelések.

Az automatikus súlycsökkentés naponta (a nap végén) történik, minden felhasználó kulcsszavainak gyakoriságát és az értékeléseket 0.99-cel megszorozzuk, ha a kulcsszóhoz/értékeléshez tartozó idő (az utolsó módosítás ideje) nagyobb egy napnál.

8.2.5. Tartalmak

A tartalmak: az Agyfarmban található dokumentumok, hírlevelek, ajánlatok, hirdetőfalak, multimédiás tartalmak és gyűjtemények összessége. A cél, hogy az Agyfarmon található tartalmak közül kereshessen a felhasználó, illetve a találati lista alapján megjeleníthesse a számára szükséges tartalmakat.

8.2.6. Aktivitás

Az aktivitás alatt valójában a rendszer szempontjából általunk önkényesen értékesnek tekintett tevékenységeket értjük. Az aktivitást egyetlen felhasználó, felhasználók csoportja és oldaltípus esetében értelmezzük. A témaoldalak csak felhasználói felület szempontból lesznek különbözők, így aktivitási szempontból is lehet őket egyformán kezelni.

Az aktivitás mérése a különböző logadatok elemzésén alapul, és egy aktivitási skálán történik. Az aktivitási skálán pontok járnak különböző általunk hasznosnak tekintett tevékenységekért. Minden felhasználó, csoport és oldal önálló indexet kap, melyek egy közös skálán hasonlíthatók össze. Ez az index az aktivitás mértékében nő és az idő függvényében, az Agyfarm rendszer minden más idővel változó paraméterével együtt, azokkal megegyező mértékben csökken:

$$A_t = 0.99 \cdot A_{t-1}.$$

A mért aktivitást arra használjuk, hogy azt a felhasználók és a rendszert üzemeltetők számára visszacsatoljuk. Azt reméljük, hogy alapvető, az aktivitással összefüggő adatok nyilvánossá tétele pozitív visszacsatolási hurkokat hoz létre, ezen túl rálátást biztosít a rendszer egészére, illetve a rendszeren belül zajló folyamatok dinamikájára.

8.3. Döntési feladatok megfogalmazása az Agyfarm ajánló rendszerében

Az Agyfarm automatikus ajánlórendszere a várhatóan nagy számítási igény és adatbázis kezelése miatt a felhasználók pillanatnyi működésétől függetlenül, a háttérben működik, az adatok 1-2 naponkénti frissítésével. Az ajánlások a még meg nem lévő kapcsolatok lehetőségét kínálják.

Az itt szereplő döntési feladatokban a **döntéshozó** az **Agyfarm ajánló rendszere**, ezért a döntési feladatok ismertetésénél csak a célok, az alternatívák és a szempontok szerepelnek.

Az **Agyfarm ajánló rendszere** rangsorolt listát ad eredményül, melynek a legfelső néhány (pl. 5) elemét látja közvetlenül a felhasználó. Lehetőség van azonban bővebb találati lista megtekintésére is.

Az ajánlások során a rendszeridőt oly módon vesszük figyelembe, hogy először az első időablakba esők között keresünk, majd szükség esetén (ha nincs elég találat) a másodikban, és így tovább.

A 8.3.1-3 szakaszokban a *My Agyfarm oldalon* történő ajánlásokat mutatjuk be. Itt jelennek meg a személyre szabott ajánlatok, melyek az adott felhasználó kulcsszavait, tartalomfogyasztási- és értékelési szokásait valamint más felhasználókkal való kapcsolatrendszerét is figyelembe véve adódnak.

8.3.1. Regisztrált felhasználónak regisztrált felhasználó ajánlása a *My Agyfarm* oldalon

Ebben a többszempontú döntési feladatban a **regisztrált felhasználók** az **alternatívák**.

Cél: Az ismerős, illetve hasonló értékrendű regisztrált felhasználók könnyebb azonosítása.

A következő **szempontok**at vettük figyelembe:

a) Közös ismeretség és felhasználói aktivitás *(objektív szempont)*
b) Közös érdeklődés I.
c) Közös érdeklődés II.

A szempontok **súlyozása**:

Jelen esetben a súlyok öt döntéshozó páros összehasonlításainak eredményeképpen születtek meg. A szempontok súlyaira a következő értékek adódtak:

közös ismeretség: 26%;
közös érdeklődés I.: 36%;
közös érdeklődés II.: 38%.

Az egyes szempontok szerinti **értékelések**:

a) Közös ismeretség és felhasználói aktivitás *(objektív szempont)*
Az egyes tulajdonságok teljesülése esetén számított értékelést (pontszámot) zárójelben adtuk meg.

- ugyanazzal a harmadik emberrel társszerzőség (80);
- ugyanazzal a harmadik emberrel közösen szerkesztett dokumentum (60) ;
- ugyanahhoz az oldalhoz tartozás (ahol az oldalt egy vagy több *node*-ként képzeljük el) (40);
- azonos (Agyfarmon belüli) dokumentumban történt hivatkozás (20);
- azonos helyen történő publikálás (20);
- azonos akadémiai hálózatba tartozás (80);
- azonos helyről rámutató link (20).

Nem kell mind a 7 alszempontot maximálisan teljesíteni ahhoz, hogy valakit nagyon hasonlónak nevezhessünk. Az elvileg lehetséges 320-ból már 200 ponttól adjuk meg a legmagasabb minősítést. A 0-200 pont lineárisan transzformálandó a 0-100-as skálára, az értékelő függvény tehát

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad x \in [0, 200].$$

b) Közös érdeklődés alapján I.

Az értékelés a felhasználói profilban tárolt kulcsszavak hasonlósága alapján történik. A felhasználónak egy adott kulcsszóhoz való viszonyát a kulcsszó előfordulási gyakorisága jellemzi, melyet a rendszer a (dinamikus) felhasználói profilban tárol. Egy-egy felhasználóhoz maximálisan 20 kulcsszót kapcsolunk (változtatható paraméter).
A maximálisan adható 100 pontot két pontszám összegeként állítottuk elő:

- $0 - 70$: a felhasználók közös kulcsszavainak hasonlósága alapján;
- $0 - 30$: a közös friss kulcsszavak számától függően.

Az $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ felhasználók közös kulcsszavai legyenek $K_1, K_2, \ldots, K_k$, súlyvektoraik pedig

$$\mathbf{F_1} = (W_{\mathbf{F}_1,K_1}, W_{\mathbf{F}_1,K_2}, \ldots, W_{\mathbf{F}_1,K_k}) \in \mathbb{R}^k_+,$$
$$\mathbf{F_2} = (W_{\mathbf{F}_2,K_1}, W_{\mathbf{F}_2,K_2}, \ldots, W_{\mathbf{F}_2,K_k}) \in \mathbb{R}^k_+.$$

Pozitív elemű vektorok hasonlóságának mérésére több lehetőség kínálkozik. A 2. Függelékben részletezett megfontolások alapján a Kullback-Leibler-féle I-divergenciát választottuk, így az $\mathbf{F_1}$ és $\mathbf{F_2}$ vektorok hasonlóságát a $KL(\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2})$ függvénnyel mérjük, a 0-70-es skálára átszámolva.

A kulcsszavak frissessége alapján az alábbi pontokat javasoljuk a közös friss kulcsszavak számának függvényében (de a kulcsszavak gyakoriságától függetlenül):

0 közös friss kulcsszó: 0 pont;
1 közös friss kulcsszó: 6 pont;
2 közös friss kulcsszó: 12 pont;
3 közös friss kulcsszó: 18 pont;
4 közös friss kulcsszó: 24 pont;
5 vagy annál több közös friss kulcsszó: 30 pont.

c) Közös érdeklődés alapján II.

Az értékelés a felhasználók által elvégzett értékelések közötti hasonlóság szerint történik. Legyenek $D_1, D_2, \ldots, D_d$ az $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ felhasználó által is értékelt tartalmak. Az értékeléseket az

$$\mathbf{E_1} = (e_{\mathbf{F}_1,D_1}, e_{\mathbf{F}_1,D_2}, \ldots, e_{\mathbf{F}_1,D_d}) \in \mathbb{R}^d_+,$$
$$\mathbf{E_2} = (e_{\mathbf{F}_2,D_1}, e_{\mathbf{F}_2,D_2}, \ldots, e_{\mathbf{F}_2,D_d}) \in \mathbb{R}^d_+$$

vektorok tartalmazzák. Az $\mathbf{E_1}$ és $\mathbf{E_2}$ vektorok hasonlóságát az $SK(\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2})$-vel mérjük, ahol $SK(\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2})$ az $\mathbf{E_1}$ és $\mathbf{E_2}$ vektorok megfelelő transzformáltjainak skaláris szorzata a 0-70-es skálára átszámolva (lásd 2. Függelék).

Jelölje $\mathbf{E_1^{friss}}$ és $\mathbf{E_2^{friss}}$ az $\mathbf{E_1}$ és $\mathbf{E_2}$ értékelő vektorok friss komponenseiből képzett vektorokat. Az $\mathbf{E_1^{friss}}$ és $\mathbf{E_2^{friss}}$ friss értékelések hasonlóságát is az $SK(\mathbf{E_1^{friss}}, \mathbf{E_2^{friss}})$-vel mérjük, mely skaláris szorzat ezúttal a 0-30-as skálára transzformált.

Megjegyzés: A fenti szempontok lehetőséget adnak arra, hogy két felhasználó között eltérést definiáljunk. Az viszont, hogy két felhasználó között az eltérés kicsi, nem feltétlenül jelenti azt, hogy ajánlanunk is kell őket egymásnak. Könnyen előfordulhat, hogy a két személy már jól ismeri egymást, hiszen együtt írtak cikket, egy tanszéken dolgoznak, stb. Az ajánlott felhasználók táborából tehát ki kell szűrni a már meglévő ismerősöket.

8.3.2. Regisztrált felhasználónak témaoldal ajánlása a My Agyfarm oldalon

Ebben a többszempontú döntési feladatban a **témaoldalak** az **alternatívák**.

Cél: A nagyszámú témaoldal közül az érdekesek könnyebb azonosítása.

Szempontok és a szerintük történő **értékelés:**

a) A felhasználó érdeklődési köre

Az alternatívák értékelése a felhasználói profilban található, valamint az oldalhoz tartozó kulcsszavak közötti hasonlóság alapján történik. Legyenek az $\mathbf{F}$ felhasználó és a $\mathbf{T}$ témaoldal közös kulcsszavai $K_1, K_2, \ldots, K_t$. A felhasználói profil ezen része tehát az

$$\mathbf{F} = (W_{\mathbf{F},K_1}, W_{\mathbf{F},K_2}, \ldots, W_{\mathbf{F},K_t}) \in \mathbb{R}^t_+$$

vektorral jellemezhető, míg a $\mathbf{T}$ témaoldal a

$$\mathbf{T} = (w_1, w_2, \ldots, w_t)\text{-vel.}$$

A $\mathbf{T}$ témaoldalnak az $\mathbf{F}$ felhasználótól vett eltérését a $KL(\mathbf{F}, \mathbf{T})$-vel mérjük (lásd 2. Függelék).

b) A felhasználóhoz közeli felhasználók

- *Kapcsolódó oldalai* alapján;
- értékelései alapján;
- aktivitása alapján.

A szempontok súlyozása itt is csoportos döntéshozatal alapján történt. Mivel csak két főszempont van, elegendő egyetlen összehasonlítást végezni. 3 döntéshozó válaszai alapján a két szempont súlya:

a felhasználó érdeklődési köre: 80%;
a felhasználóhoz közeli felhasználókon keresztül: 20%.

A *felhasználóhoz közeli felhasználók* szempont alszempontjainak súlyozása is kérdőívek alapján történt. 3 döntéshozó válaszai alapján az alszempontok súlyai:

Kapcsolódó oldalai alapján: 25%;
értékelések alapján: 54%;
aktivitások alapján: 21%.

Egy felhasználó tevékenysége során egy oldal az alábbi szempontok szerint gyűjtheti pontjait:

- kapcsolódó oldalak: ha egy oldal a felhasználó *Kapcsolódó oldalak* között van, akkor 100 pont, egyébként 0;
- értékelés: a felhasználó értékeléseinek aggregált értéke a 0-100-as skálára vetítve;
- egyéb tevékenységek, melyek értékeit a 7. táblázat mutatja.

A felhasználók közül elegendő csak a legközelebbi néhányat (pl. 30) vizsgálni, ill. az általuk kapcsolt, értékelt, linkelt oldalakkal számolni. Az egyes felhasználókat jellemző közelségi súlyt mint szorzót használjuk.

	Olvasás	Adminisztráció/ Tisztségviselés	Létrehozás
Élmény oldal	0	10	10
Közös munka komplexum	10	50	70
Ötlet oldal	10	50	70
Projekt oldal	20	60	80
Kurzus oldal	30	80	90
Konferencia oldal	30	60	90
Publikációs oldal	50	90	90
E-kiadvány oldal	30	60	90
Tematikus gyűjtő oldal	50	90	90
Intézmény oldal	30	90	90

7. táblázat *Aktivitás értékelése a különböző oldaltípusokban*

8.3.3. Regisztrált felhasználónak dokumentum ajánlása a *My Agyfarm* oldalon

Ebben a feladatban a **dokumentumok** az **alternatívák**.

Cél: A nagyszámú dokumentum közül az érdekesek könnyebb azonosítása.

Az ajánlórendszer megvalósítás szintjén

Az ajánlórendszer hatékony működéséhez a következő eljárást javasoljuk. Adott a fix időablak hossza, mely pl. 2 hét. A dokumentumokhoz rendelt rendszeridő (amikor felkerült az Agyfarmra) alapján a dokumentumok csoportosíthatók. A legfrissebbek az első időablakba, a többiek a másodikba, harmadikba, stb. Az egyes időablakok hossza annál nagyobb, minél régebbi a dokumentum:

1. időablak – 2 hét (0-14 napja keletkezett);
2. időablak – 4 hét (15-42 napja keletkezett);
3. időablak – fél év (43-200 napja keletkezett);
4. időablak – 2 év (200 napnál régebben keletkezett).

1. lépés

Az 1. időablakba tartozó dokumentumok közül kiválasztjuk az érdeklődésnek megfelelő találatokat, majd azokat az értékelések szerint rendezzük és külön ajánlat ablakban jelenítjük meg. Ha ez lefutott minden egyes felhasználóra, akinek ajánlani akartunk, akkor továbbléphetünk.

2. lépés

Azon felhasználók esetén, akik túl kevés (kevesebb, mint pl. 5) ajánlatot kaptak valamelyik ablakukban, újra lefuttatjuk az ajánló algoritmust, de csak a 2. időablakba tartozó dokumentumokra. Ha még mindig maradna olyan felhasználó, akinek nincs meg az 5-5 dokumentum ajánlata, akkor továbblépünk.

3-4. lépés

A fentiek ismételt végrehajtása a 3-4. időablakba tartozó dokumentumokra.

Szempontok és a szerintük történő **értékelés:**

a) A felhasználó érdeklődési köre

Az értékelés a felhasználói profilban található és a dokumentumhoz rendelt kulcsszavak közötti hasonlóság alapján történik. Legyenek az **F** felhasználó és a **D** dokumentum közös kulcsszavai $K_1, K_2, \ldots, K_t$. A felhasználói profil ezen része tehát az

$$\mathbf{F} = (W_{\mathbf{F},K_1}, W_{\mathbf{F},K_2}, \ldots, W_{\mathbf{F},K_t}) \in \mathbb{R}_+^t$$

vektorral jellemezhető, míg a **D** dokumentum

$$\mathbf{D} = (w_1, w_2, \ldots, w_t)\text{-vel.}$$

A **D** dokumentumnak az **F** felhasználótól vett eltérését a $KL(\mathbf{F}, \mathbf{D})$-vel mérjük (lásd 2. Függelék).

b) A felhasználóhoz közeli felhasználók

- értékelései alapján;
- aktivitása alapján (létrehozták, ajánlották, belinkelték).

A dokumentumok értékelésének 3 szempontja és azok súlyai 3 döntéshozó páros összehasonlításai alapján

minőség: 23%;
fontosság: 45%;
aktualitás: 32%.

A felhasználók mindhárom szempont szerint értékelnek, majd ezen értékeléseket aggregáljuk a fenti súlyokkal.

A felhasználók közül elegendő csak a legközelebbi néhányat (pl. 30) vizsgálni, ill. az általuk kapcsolt, értékelt, linkelt dokumentumokkal számolni. Az egyes felhasználókat jellemző közelségi súlyt, mint szorzót használjuk.

Az ebben a fejezetben tárgyalt ajánlási feladatokon túl olyan problémák is felmerültek, mint az Agyfarm sikeres működtetéséhez szükséges információk kinyerése; a csoportképződés nyomon követése és támogatása; a témák és témaoldalak sikeressége; az ajánlatok sikeressége. A 2. Függelékben ezen kívül felvázolom a nemnegatív ill. pozitív komponensű vektorok összehasonlításának lehetőségeit, valamint az értékeléseket tartalmazó vektorok összevetésére vonatkozó javaslatunkat.

8.4. Tapasztalatok

Az Agyfarm modellezése során számos problémát többszempontú döntési feladatként fogalmaztunk meg és adtunk megoldási javaslatot, melynek során az alábbi feladatokat kellett elvégezni:

- releváns szempontok meghatározása;
- a szempontsúlyok meghatározása, mely néhány kivételtől eltekintve páros összehasonlítással történt;
- az alternatívák szempontok szerint történő értékelési mechanizmusának kidolgozása, amelyet hasznossági függvények konstrukciójával oldottunk meg.

Létre kellett hozni annak a komplex, dinamikus, több ezer felhasználóval és több tízezer dokumentummal és témaoldallal is működni képes rendszernek a modelljét, amely a felhasználók számára könnyen kezelhető, mégis magas használati értéket biztosít.

Az Agyfarm újdonsága, hogy integrálja a felhasználók, dokumentumok és témaoldalak kulcsszó-profiljait, a felhasználói aktivitást és értékeléseket, a témák aktualitásának időbeli változását, továbbá a működés során keletkező új információkat visszacsatolja a rendszerbe.

Az együttműködő partnerekkel történő megbeszélések során számos alkalommal kellett szempontokat súlyozni. Általános tapasztalatom, hogy a döntéshozók nyitottak voltak a páros összehasonlítás módszerének alkalmazására. Az alábbi két feltételt azonban érdemes figyelembe venni:

- a kérdések világosak és egyszerűek legyenek, a döntéshozónak ne kelljen értelmezési problémákkal foglalkoznia;
- lehetőség szerint egy megbeszélésen ne szerepeljen túl sok páros összehasonlítás.

Az értékelésre adott hasznossági függvényeket úgy konstruáltuk meg, hogy **minden paraméterük változtatható** a rendszer működése során fellépő új információk ismeretében. Ilyen fontos adat például a felhasználók, dokumentumok és témaoldalak tényleges száma, amelyet a modellezéskor még csak megbecsülni lehetett. Várhatóan pontosabb, de hosszabb futási idejű ajánlási algoritmust eredményez az, ha pl. az egy felhasználóhoz rendelt kulcsszavak maximális számát 20 helyett 50-nek választjuk. Adott számítási kapacitás mellett ez kis számú felhasználó esetén még nem feltétlenül jelent érzékelhető időtöbbletet, a felhasználók számában történő nagyságrendi növekedés következtében azonban igen.

9. Összefoglalás

9.1. Elméleti és módszertani eredmények

Az értekezés elméleti és módszertani részének témája a páros összehasonlítás mátrixok vizsgálata, amely a többszempontú döntési feladatokban

- a szempontok súlyainak;
- az alternatívák szempontok szerinti értékelésének;
- csoportos döntés esetén a döntéshozók szavazóerőinek

meghatározására használható.

Négy eljárást tekintettem át a páros összehasonlítás mátrixok legkisebb négyzetes közelítéséből (LSM) adódó súlyok meghatározására. A kapcsolódó nemlineáris célfüggvény nemkonvexitása miatt az optimumhely általában nem egyértelmű. A feladat megoldására korábban használatos Newton-iterációs technikák sajátossága, hogy a megoldás érzékeny az indulópont választására. Az általam tárgyalt módszerek az összes lokális és globális minimumhely megkeresésére alkalmasak. A tapasztalatok alapján a 3×3-as mátrixok esetére használható a rezultáns-módszer és a Gröbner-bázisok, 3×3-as és 4×4-es esetben az általánosított rezultánsokat alkalmazó Fermat szoftver, 3×3-astól 8×8-as méretig pedig a homotópiás kontinuitási módszer.

A kutatás jelenlegi fázisában a 3×3-as esetben tudok páros összehasonlítás mátrixokat nagy számban generálni, majd azokból automatikusan súlyokat számolni. Ez lehetőséget ad a súlyozás szabályszerűségeinek feltárására, valamint a véletlen és a döntéshozó által megadott mátrixok összevetésére. 3×3-as mátrixokra a tárgyalt 4 módszer mindegyike lényegében azonnali eredményt ad, ezért kis méretű döntési problémák szempont-súlyozásában felhasználhatók.

A 4×4-estől 8×8-as méretig a súlyok számítása egyedileg történik, ezért a statisztikai jellegű elemzés lehetősége korlátozott. A futási eredmények (különösen $n = 7, 8$ esetében) azt mutatják, hogy döntési feladatok valós időben történő megoldására még nem alkalmazhatók, az általam alkalmazott módszertan a kutatás fázisában van.

A legkisebb négyzetes közelítésből számolt súlyvektor ismeretében lehetőség nyílik e módszer sajátosságainak feltárására valamint más súlymeghatározó módszerekkel való összevetésre. A módszerek előnyeinek és hátrányainak pontosabb ismeretével közelebb kerülünk ahhoz a célhoz, hogy a döntési feladattípusok alapfeltevéseinek megfelelően ki tudjuk jelölni az alkalmazható súlymeghatározó módszerek csoportját.

A dolgozatban a sajátvektor (EM), a legkisebb négyzetes közelítés (LSM), és a szinguláris felbontás módszereit hasonlítottam össze. A 3×3-as mátrixok vizsgálata alapján megállapítottam, hogy az inkonzisztencia mérésére szolgáló mennyiségek közül a szinguláris értékfelbontásból származtatott definíció lényeges eltérést mutat az EM- és LSM-inkonzisztenciáktól. Találhatók olyan mátrixok, amelyek EM és LSM-értelemben közel konzisztensnek mondhatók, SVD-inkonzisztenciájuk viszont magas.

A három módszerrel számolt súlyvektorokat az inkonzisztencia függvényében hasonlítottam össze. Általánosságban elmondható, hogy a közel konzisztens mátrixokból mindegyik módszer ugyanazt a rangsort eredményezi, az inkonzisztencia értékek növekedésével viszont egyre nagyobb az eltérés a súlyvektorok között.

A páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciájának mérésére szolgáló CR értéket nagy mintaszámú, véletlenül generált mátrixok statisztikai elemzésével vizsgáltam meg. A számítások szerint az EM-inkonzisztenciára felírt 10%-os szabály lényeges különbséget mutat a mátrix méretének függvényében. Az eredmények jelenlegi formája elsősorban kérdésfelvető célzatú, a válaszokhoz további – gyakorlati feladatokból származó mátrixokat is szerepeltető – kutatás szükséges.

9.2. Döntési feladatok alkalmazásokban

Az MTA SZTAKI-ban elvégzett két alkalmazási munkában a döntési feladatok modellezésében, a szempontsúlyok meghatározásában és az értékelésre vonatkozó hasznossági függvények konstrukciójában szereztem gyakorlati tapasztalatokat.

Első gyakorlati problémánkban egy nemzetközi háttérrel rendelkező bank projektjeinek rangsorolására adtunk modellt. A feladat olyan rendszer tervezése és annak szoftveres megvalósítására vonatkozó javaslat elkészítése volt, amely egyidejűleg 50-100 projekt kezelésére alkalmas, az alternatívák dinamikusan változó halmazát is megengedve. A bank szakembereivel közösen kialakított szempontrendszert fastruktúrába rendeztük, majd a banki felsővezetés által megadott páros összehasonlításokból számított szempontsúlyokkal láttuk el. Ez lehetővé tette a rangsoroló mechanizmus működésének a banki stratégiákhoz való illesztését. A projektek (alternatívák) szempontok szerinti értékelését a bank által megadott támpontokon alapuló hasznossági függvények konstrukciójával javasoltuk. A objektív szempontok szerint történő értékelés a beépített függvényeken keresztül automatikusan történik, a szubjektív szempontok szerinti értékelésre pedig egységes, áttekinthető skálákat vezettünk be, megkönnyítendő a folyamatban résztvevő döntéshozók munkáját. A bank 2002-ben vezette be az általunk javasolt módszertan alkalmazását, melynek sikeres működéséről írásbeli referenciát kaptunk.

Második munkánk az Agyfarm (az akadémiai kutatás kollaboratív kommunikációs és tudományszervezési modellje on-line technológiai környezetben) tervezésében az ajánló rendszer, a felhasználók közötti kapcsolatok feltárása, valamint a csoportképződés folyamatának döntési feladatként való megfogalmazása és megoldása volt. Az Agyfarm többezres felhasználói létszámra, több tízezres oldal- és dokumentumszámra tervezett rendszerében valós időben működő ajánlásra, a felhasználói aktivitás követésére és azt a rendszerbe történő visszacsatolásra, a felhasználók egymás közötti kapcsolatainak létrehozására és erősítésére, valamint a működtetés során fellépő döntési feladatok kezelésére adtunk javaslatot. A szempontok súlyainak meghatározására páros összehasonlításokat és közvetlen súlyozást alkalmaztunk, a szempontok szerinti értékeléshez pedig hasznossági függvényeket definiáltunk.

Hivatkozások

[1] Al-Shemmeri, T., Al-Kloub, B., Pearman, A. [1997]: Computer aided decision support system for water strategic planning in Jordan, *European Journal of Operational Research,* **102**, pp. 455-472.

[2] Arisztotelész [i.e. 350]: Éthika Nikomakheia (Ethica Nicomachea), Magyar fordításban: Nikomakhoszi Etika, *Magyar Helikon,* Budapest, 1971. Angolra fordította Sir David Ross: Nichomachean Ethics, *Oxford University Press,* London, 1954.

[3] Bana e Costa, C.A., Vansnick, J.C. [1994]: MACBETH – an interactive path towards the construction of cardinal value functions, *International Transactions in Operational Research,* **1**, pp. 489-500.

[4] Bekker Zs. (szerk.) [2002]: Alapművek, alapirányzatok. Gazdaságelméleti olvasmányok 1., *AULA Kiadó,* Budapest.

[5] Benayoun, R., Tergny, J. [1969]: Critères multiples en programmation mathématique: une solution dans le cas linéaire. *Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Opérationelle (RIRO),* **2**, pp. 31-56.

[6] Benayoun, R., de Montgolfier, J., Tergny, J. e Larichev, O., [1971]: Linear programming with multiplic objective functions: STEP method (STEM). Mathematical Programming, **1**, pp. 366-375.

[7] Bernoulli, D. [1738]: Specimen theoriae novae de mensura sortis, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperalis Petropolitanae,* Angol fordításban: Exposition of a new theory of measurement of risk, *Econometrica* **51**(4), July, pp. 1065-1092.

[8] Bernstein, D.N. [1975]: The number of roots of a system of equations, *Functional Analysis and its Applications,* **9**, pp. 183-185.

[9] Borda, J.C. de [1781]: Mémoire sur les électiones au scrutin, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences,* Paris.

[10] Brans, J.P. [1982]: L'ingéniérie de la décision, Élaboratorion d'instruments d'aide ŕ la décision. Méthode PROMETHEE, Université Laval, Collogue d'Aide ŕ la Décision Québec Canada, pp. 183-213.

[11] Brans, J.P., Vincke, Ph. [1985]: A preference ranking organisation method (the PROMETHEE method for multiple criteria decision making), *Management Science,* **31**, pp. 647-656.

[12] Brans, J.P., Vincke, Ph., Mareschal, B. [1986]: How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method, *European Journal of Operational Research,* **24**, pp. 228-238.

[13] Brans, J.P. [1994]: The space of freedom of the decision maker or modelling the human brain, EURO GOLD MEDAL Lecture, Glasgow-EURO XIII.

[14] Brans, J.P., Mareschal, B. [1994]: The PROMCALC and GAIA, *Decision Support Systems,* **12**, pp. 297-310.

[15] Brans, J.P. [2002]: Ethics and decision, *European Journal of Operational Research,* **136**(2), pp. 340-352.

[16] Bryson, N. [1995]: A goal programming method for generating priority vectors, *Journal of the Operational Research Society,* **46**, No. 5, pp. 641-648.

[17] Buchberger, B. [1985]: An algorithmic method in polynomial ideal theory, in: *Multidimensional System Theory,* N.K. Bose (editor), D. Rediel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster, pp. 184-232.

[18] Buse, L., Elkadi, M., Mourrain, B. [2000]: Generalized resultants over unirational algebraic varieties, *Journal of Symbolic Computation,* **29**, pp. 515-526.

[19] Chandran, B., Golden, B., Wasil, E. [2005]: Linear programming models for estimating weights in the analytic hierarchy process, *Computers & Operations Research,* **32**, pp. 2235-2254.

[20] Chu, A.T.W., Kalaba, R.E., Spingarn, K. [1979]: A comparison of two methods for determining the weight belonging to fuzzy sets, *Journal of Optimization Theory and Applications,* **4**, pp. 531-538.

[21] Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L. [1957]: Introduction to Operations Research, *Wiley,* New York.

[22] Condorcet, M. [1785]: Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues á la Pluralité des Voix, Paris.

[23] Cournot, A.A. [1843]: Exposition de la théorie des chances et des probabilités, *Hachette,* Paris.

[24] Crawford, G., Williams, C. [1985]: A note on the analysis of subjective judgment matrices, *Journal of Mathematical Psychology,* **29**, pp. 387-405.

[25] Csáki, P., Rapcsák, T., Turchányi, P., Vermes, M.: Research and development for group decision aid in Hungary by WINGDSS, a Microsoft Windows based group decision support system. *Decision Support Systems,* **14**, pp. 205-217.

[26] Davey, A., Olson, D., Wallenius, J. [1994]: The process of multiattribute decision making: A case study of selecting applicants for a Ph.D. program, *European Journal of Operational Research,* **72**(3), pp. 469-484.

[27] Debreu, G. [1954]: Representation of a preference ordering by a numerical function, in: Thrall, R., Coombs, C., Davis, R. (editors): Decision Processes, *Wiley,* New York, pp. 159-165.

[28] De Jong, P. [1984]: A statistical approach to Saaty's scaling methods for priorities, *Journal of Mathematical Psychology,* **28**, pp. 467-478.

[29] Dixon, A.L. [1908]: The eliminant of three quantities in two independent variables, *Proceedings of the London Mathematical Society,* **7**, pp. 50-69, pp. 473-492.

[30] Dole, S.H., Campbell, H.G., Dreyfuss, D., Gosch, W.D., Harris, E.D., Lewis, D.E., Parker, T.M., Ranftl, J.W., String, J. Jr. [1968]: Methodologies for analyzing the comparative effectiveness and costs of alternate space plans, RM-5656-NASA, Volume **1** (Summary) and Volume **2**, The Rand Corporation, Santa Monica, California.

[31] Drexler, F.J. [1978]: Eine Methode zur Berechnung sämtlicher Lösungen von Polynomgleichungssystemen, *Numerische Mathematik,* **29**, pp. 45-58.

[32] Eatwell, J., Milgate, M., Newman, P. (szerk.) [1987]: The New Palgrave. A Dictionary of Economics, 1-4. kötet, *The Macmillan Press Limited,* London.

[33] Edgeworth, F.Y. [1879]: The Hedonical Calculus, Mind IV, pp. 349-409.

[34] Edwards, W. [1977]: How to use multiattribute utility measurement for social decision making, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics,* **SMC-7**, **5**, pp. 326-340.

[35] Edwards, W., Barron, F.H., [1994]: SMARTS and SMARTER: Improved Simple Methods for Multiattribute Utility Measurement, *Organizational Behavior and Human Decision Processes,* **60**, pp. 306-325.

[36] Fallon, C. [1965]: Using the combinex method in the measurement and comparison of value, National Electronics Conference Proceedings XXI.

[37] Fallon, C. [1980]: Value Analysis, USA: Value Foundation.

[38] Farkas, A., Lancaster, P., Rózsa, P. [2003]: Consistency adjustment for pairwise comparison matrices, *Numerical Linear Algebra with Applications,* **10**, pp. 689-700.

[39] Farkas, A., Rózsa, P. [2001]: Data Perturbations of Matrices of Pairwise Comparisons, *Annals of Operations Research,* **101**, pp. 401-425.

[40] Farkas, A., Rózsa, P. [2004]: On the Non-Uniqueness of the Solution to the Least-Squares Optimization of Pairwsie Comparison Matrices, *Acta Polytechnica Hungarica, Journal of Applied Sciences at Budapest Polytechnic Hungary,* **1**, pp. 1-20.

[41] Fishburn, P.C. [1970]: Utility Theory for Decision Making, *Wiley,* New York.

[42] Forgó, F., Szidarovszky, F. [2003]: On the relation between the Nash bargaining solution and the weighting method, *European Journal of Operational Research,* **147**, pp. 108-116.

[43] Gao, T., Li, T.Y., Wang, X. [1999]: Finding isolated zeros of polynomial systems in $\mathbb{C}^n$ with stable mixed volumes, *Journal of Symbolic Computation,* **28**, pp. 187-211.

[44] Garcia, C.B., Zangwill, W.I. [1979]: Finding all solutions to polynomial systems and other systems of equations, *Mathematical Programming,* **16**, pp. 159-176.

[45] Gass, S.I., Rapcsák, T. [2004]: Singular value decomposition in AHP, *European Journal of Operations Research,* **154**, pp. 573-584.

[46] van Gennip, C.E.G., Hulshof, J.A.M., Lootsma, F.A. [1997]: A multicriteria evaluation of diseases in a study for public-health planning, *European Journal of Operational Research,* **99**(2), pp. 236-240.

[47] Golany, B., Kress, M. [1993]: A multicriteria evaluation of methods for obtaining weights from ratio-scale matrices, *European Journal of Operations Research,* **69**, pp. 210-220.

[48] Gomes, L.F., Lima, M. [1992]: From modelling individual preferences to multicriteria ranking of discrete alternatives: a look at prospect theory and the additive difference model, *Foundations of Computing and Decisions Sciences,* Volume **17.**

[49] Gossen, H.H. [1854]: Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verhkers, und der daraus fliessenden Regeln für menschliches Handeln, *Braunschweig*, Vieweg. Reprinted: *Liberac,* Amsterdam, 1967. Angolra fordította R.C. Blitz, The Laws of Human Relations and the Rules of Human Action Derived Therefrom, *MIT Press,* Cambridge, 1983.

[50] Grolleau, J., Tergny, J. [1971]: Manuel de reference du programme ELECTRE II, *SEMA – METRA International.*

[51] Guilford, J.P. [1936]: Psychometric Methods, *McGraw-Hill Book,* New York.

[52] Hinloopen, E., Nijkamp, P., Rietveld, P. [1983]: The regime method: a new multi-criteria technique, in P. Hansen (ed.) Essays and Surveys on Multiple Criteria Decision Making, *Springer Verlag,* Berlin.

[53] Hwang (egyes hivatkozásokban Huang), C.L., Yoon (egyes hivatkozásokban Yong), K. [1981]: Multiple attribute decision making: Methods and applications – A state-of-the-art survey, *Springer-Verlag.*

[54] Jacquet-Lagrèze, E., Siskos, J. [1982]: Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision making: the UTA method, *European Journal of Operational Research,* **10**, pp. 151-164.

[55] Jacquet-Lagrèze, E., Shakun, M.F. [1984]: Decision supports systems for semi-structured buying decision, *European Journal of Operational Research,* **16**, pp. 48-58.

[56] Jensen, R.E. [1983]: Comparison of Eigenvector, Least squares, Chi square and Logarithmic least square methods of scaling a reciprocal matrix, *Working Paper 153 http://www.trinity.edu/rjensen/127wp/127wp.htm*

[57] Jensen, R.E. [1984]: An Alternative Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, *Journal of Mathematical Psychology,* **28**, pp. 317-332.

[58] Jevons, W.S. [1871]: The Theory of Political Economy, Pelican Classics edn., ed. R.D. Collison Black, *Penguin Books,* Harmondsworth, 1970.

[59] Kahneman, D., Slovic, P., Tversky, A. [1982]: Judgement under Uncertainty: Heuristics and Biases, *Cambridge University Press,* Cambridge.

[60] Kapur, D., Saxena, T., Yang, L. [1994]: Algebraic and geometric reasoning using Dixon resultants. In: *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation.* A.C.M. Press.

[61] Karagiannidis, A., Moussiopoulos, N. [1997]: Application of ELECTRE III for the integrated management of municipal solid wastes in the Greater Athens Area, *European Journal of Operational Research,* **97**(3), pp. 439-449.

[62] Karni, R., Feigin, P., Breiner, A. [1992]: Multicriterion issues in energy policymaking, *European Journal of Operational Research,* **56**(1), pp. 30-40.

[63] Keeney, R.L., Raiffa, H. [1976]: Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs, *John Wiley* & *Sons*, New York.

[64] Kendall, M.G. [1948]: Rank Correlation Methods, *C. Griffin* & *Co.,* London.

[65] Khovanskii, A.G. [1978]: Newton polyhedra and the genus of complete intersections, *Functional Analysis and its Applications,* **12**, pp. 38-46.

[66] Kindler J., Papp O. [1977]: Komplex rendszerek vizsgálata – Összemérési módszerek, *Műszaki Könyvkiadó,* Budapest.

[67] Kindler J. [1991]: Fejezetek a döntéselméletből, *Aula Kiadó*, Budapest

[68] Kiss, L. N., Martel, J. M., Nadeau, R. [1994]: ELECCALC – an interactive software for modelling the decision maker's preferences, *Decision Support System,* **12**, pp. 311-326.

[69] Koczkodaj, W.W. [1993]: A New Definition of Consistency of Pairwise Comparisons, *Mathematical and Computer Modelling,* **18**, Issue 7, pp. 79-84.

[70] Kuros, A.G. [1971]: Felsőbb algebra, *Tankönyvkiadó,* Budapest.

[71] Kushnirenko, A.G. [1976]: Newton polytopes and the Bézout theorem, *Functional Analysis and its Applications,* **10**, pp. 233-235.

[72] Laffy, R. [1966]: La méthode MARSAN pour la recherce de produits nouveaux című előadása. XIX. ESOMAR-Kongresszus, Koppenhága.

[73] Leclercq, J.P. [1984]: Propositions d'extensions de la notion de dominance en présence de relations d'ordre sur le pseudo-critéres: MELCHIOR, *Revue Belge de Recherche Opérationnelle, de Statistique et d' Informatique,* **24**(1), pp. 32-46.

[74] Leontief, W.W. [1966]: Input-output Economics, *Oxford University Press,* London – New York.

[75] Levine, P., Pomerol, J.C. [1986]: PRIAM, an Interactive Program for Choosing Among Multiple Attribute Alternatives, *European Journal of Operational Research,* **25**, pp. 272-280.

[76] Lewis, R.H. : Computer algebra system *Fermat.* *http://www.bway.net/~lewis/*

[77] Li, T.Y. [1997]: Numerical solution of multivariate polynomial systems by homotopy continuation methods, *Acta Numerica,* **6**, pp. 399-436.

[78] Lootsma, F.A., Mensch, T.C.A., Vos, F.A. [1990]: Multi-criteria analysis and budget reallocation in long-term research planning, *European Journal of Operational Research,* **47**(3), pp. 293-305.

[79] Luce, R.D., Raiffa, H. [1957]: Games and Decisions, *Wiley,* New York.

[80] Luce, R.D., Suppes, P. [1965]: Preference, utility and subjective probability, *Handbook of Mathematical Psychology, Wiley,* New York, Volume **2**, pp. 249-410.

[81] Marshall, A. [1898]: Principles of Economics, 4th edition, *Macmillan,* New York.

[82] Menger, K. [1934]: Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre. Betrachtungen in Anschluss an das sogenannte Petersburger Spiel, *Zeitschrift für Nationalökonomie,* **5**, pp. 459-485.

[83] Mészáros, Cs., Rapcsák, T. [1996]: On sensitivity analysis for a class of decision systems, *Decision Support Systems,* **16**, pp. 231-240.

[84] Mill, J.S. [1863]: Utilitarianism, Parker, son and Bourn, London. Első megjelenés: Fraser's Magazine, October-December 1861. Vol. **64**. Magyarra fordította Papp Mária, J.S. Mill: A szabadságról. A haszonelvűség, *Magyar Helikon,* 1980.

[85] Munda, G. [1995]: Multicriteria evaluation in a fuzzy environment. Theory and applications in ecological economics, *Physica-Verlag,* Heidelberg.

[86] Murofushi, T., Sugeno, M. [1989]: An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure, *Fuzzy Sets and Systems,* **29**, pp. 201-227.

[87] Neumann, J. von, Morgenstern, O. [1944]: Theory of Games and Economic Behaviour, *Princeton University Press,* Princeton.

[88] Pareto, V. [1896]: Cours d'économie politique professé à l'université de Lausanne, 1. kötet, *F. Rouge,* Lausanne.

[89] Pareto, V. [1906]: Manuale d'economia politica, *Societa Editrice Libraria,* Francia fordításban: Manuel d'économie politique, *Giard et Briére,* Paris, 1909.

[90] Pareto, V. [1916]: Trattato di Sociologia Generale, 4 kötet, *Barbera,* Florence, Angolra fordította és szerkesztette Arthur Livingston: The Mind and Society, *Harcourt Brace & Co.,* New York, 1935.

[91] Pastign, H., Leysen, J. [1989]: Constructing an outranking relation with ORESTE. *Mathematical and Computer Modelling,* **12**, pp. 1255-1268.

[92] PATTERN relevance guide, 3 vols., National Technical Information Service, U.S. Department of Commerce. Virginia.

[93] PATTERN procedure manual, Honeywell Aero Report, National Technical Information Service, U.S. Department of Commerce. Virginia.

[94] Pápai Z., Nagy P. [1991]: Döntéselmélet szöveggyűjtemény, *Aula Kiadó*, Budapest.

[95] Prékopa A. [1978]: A statisztikai döntéselméleti gondolkodás fejlődése napjainkig, *Statisztikai Szemle,* **56**, pp. 893-903. (A magyar statisztikai felsőoktatás bevezetésének 200. évfordulója alkalmából 1977. október 26-án tartott tudományos tanácskozás Matematikai statisztikai – Statisztikai informatikai szekciójának ülésén megvitatott előadás.)

[96] Ramsey, F.P. [1931]: Truth and probability, in: Ramsey, F.P.: The Foundations of Mathematics and other Logical Essays, ed. R.B. Braithwaite, *Kegan Paul, Trench, Trubner and Co.,* London.

[97] Rebai, A. [1993]: BB-TOPSIS: a bag based technique for order preference by similarities to ideal solution, *Fuzzy Sets and Systems,* **60**, pp. 143-162.

[98] Ross, R.T. [1934]: Optimum orders for the presentation of pairs in the method of paired comparison, *Journal of Educational Psychology,* **25**, pp. 375-382 .

[99] Roubens, M. [1982]: Preference relations on actions and criteria in multicriteria decision making, *European Journal of Operational Research,* **10**, pp. 51-55.

[100] Roy, B. [1968]: Classement et choix en présence de points de vue multiples (La méthode ELECTRE), *Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Opérationelle (RIRO),* **8**, pp. 57-75. .

[101] Roy, B. [1969]: Algebre Moderne et Theorie des Graphes Orientees vers les Sciences Economiques et Sociales, Paris, Dunod.

[102] Roy, B., Bertier, P. [1973]: La méthode ELECTRE II. Une application au media planning. In Ross, M.(editor) *Operational Research,* **72**, pp. 291-302. North Holland Publishing Company.

[103] Roy, B. [1978]: ELECTRE III: un algorithme de classements fondé sur une représenation floue des préferences em présence de critères multiples. *Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle,* **20**, pp. 3-24.

[104] Roy, B., Hugonnard, J.C. [1982]: Ranking of suburban line extension projects of the Paris Metro System by a multicriteria method. *Transportation Research,* **16A**, pp. 301-322.

[105] Roy, B., Skalka, J. [1984]: ELECTRE IS: Aspects methodologiques et guide d'utilisation. *Document du LAMSADE* **30**, Universite Paris Dauphine.

[106] Saaty, T.L. [1980]: The analytic hierarchy process, *McGraw-Hill,* New York.

[107] Saaty, T.L. [1994]: Fundamentals of Decision Making, *RSW Publications.*

[108] Savage, L.J. [1954]: The Foundations of Statistics, *Wiley,* New York.

[109] Simon, H.A. [1957]: Models of Man, *Wiley,* New York.

[110] Simon, H.A. [1979]: Models of Thought, *Yale University Press,* New Haven.

[111] Solymosi, T., Dombi, J. [1986]: A method for determining the weights of criteria: The centralized weights, *European Journal of Operational Research,* **26**, pp. 35-41.

[112] Srinivasan, V., Shocker, A.D. [1973]: Linear Programming Techniques for Multidimensional Analysis of Preference, *Psychometrika,* **38**, No. 3, pp. 335-369.

[113] Standard, S.M. [2000]: Analysis of positive reciprocal matrices, Master's Thesis, Graduate School of the University of Maryland.

[114] Steenge, A.E. [1981]: The Verification of Efficient Growth: An Approach via Stojanović's Matrix of Growth, *Journal of Macroeconomics,* **3**, No. 2, pp. 271-281.

[115] Steenge, A.E. [1986]: Saaty's Consistency Analysis: An Application to Problems in Static and Dynamic Input-Output Models, *Socio-Economic Planning Sciences,* **20**, No. 3, pp. 173-180.

[116] Steenge, A.E. [1987]: Consistency and Composite Numeraires in Joint Production Input-Output Analysis: An Application of Ideas of T.L. Saaty, *Mathematical Modelling,* **9**, No. 3-5, pp. 233-241.

[117] Stojanović, D. [1974]: Model kretanja privede sap vojvodine na bazi matrice rasta, (English Summary), *Mathematika Balkanika,* **4**.

[118] Stojanović, D. [1984]: The Model Based on The Matrix of Economic Growth, *Socio-Economic Planning Sciences,* **18**, No. 3, pp. 167-169.

[119] Sugeno, M. [1974]: Theory of fuzzy integrals and its application, Doctoral thesis, Tokyo Institute of Technology.

[120] Takayama, A. [1974]: Mathematical Economics, *The Dryden Press,* Hinsdale, Illinois.

[121] Temesi J. [2002]: A döntéselmélet alapjai, *Aula Kiadó,* Budapest.

[122] Thorndike, E.L. [1920]: A Constant Error in Psychological Ratings, *Journal of Applied Psychology,* **4**, pp. 25-29.

[123] Thurstone, L.L. [1927]: The Method of Paired Comparisons for Social Values, *Journal of Abnormal and Social Psychology,* **21**, pp. 384-400.

[124] Tummala, V.M.R., Ling, H. [1998]: A note on the computation of the mean random consistency index of the analytic hierarchy process (AHP), *Theory and Decision,* **44**, pp. 221-230.

[125] Tversky, A. [1969]: Intransitivity of preferences, *Psychological Review,* **76**, pp. 31-48.

[126] Vansnick, J.C. [1986]: On the problem of weights in multiple criteria decision making (the noncompensatory approach), *European Journal of Operational Research,* **24**, pp. 288-294.

[127] Vargas, L.G. [1982]: Reciprocal matrices with random coefficients, *Mathematical Modelling,* **3,** pp. 69-81.

[128] Volterra, V. [1906]: L'Economia matematica e il Nuovo manuale del Prof. Pareto, *Giornale degli economisti,* **32**, pp. 296-301. Angolra fordította A.P. Kirman; J.S. Chipman (szerk.): 'Mathematical economics and Professor Pareto's new manual', in Preferences Utility and Demand, J.S. Chipman, L. Hurwicz, M.K. Richter, H.F. Sonnenschein (szerk.), *Harcourt Brace, Jovanovich,* New York, 1971.

[129] Voogd, J.H. [1983]: Multi Criteria Evaluation for Urban and Regional Planning, *Pion,* London.

[130] Wald, A. [1950]: Statistical Decision Functions, *Wiley,* New York.

[131] Wold, H. [1943-44]: A synthesis of pure demand analysis, I-III., *Skandinavisk Aktuarietidskrift,* **26**, pp. 85-118, pp. 220-263; **27**, 69-120.

[132] Yager, R.R. [1988]: Ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics,* **18**, pp. 183-190.

[133] Yu, W.; Roy, B. [1982]: ELECTRE TRI – Aspects Methodologiques et Manuel d'Utilisation, Cahier du Lamsade, Paris, 1982, Universite de Paris Dauphine.

[134] Zalai, E. [2000]: Matematikai közgazdaságtan, *KJK-KERSZÖV,* Budapest.

[135] Zoltayné Paprika Z. (szerk.) [2002]: Döntéselmélet, *Alinea Kiadó*, Budapest.

[136] Zsolnai L. [2000]: A döntéshozatal etikája, BKÁE Vezetőképző Intézet VIP, Budapest.

Saját ill. társszerzős publikációk és tanulmányok

[S-1] Bozóki, S. [2003]: A method for solving *LSM* problems of small size in the AHP, *Central European Journal of Operations Research,* **11**, pp. 17-33.

[S-2] Bozóki, S., Lewis, R.H. [2005]: Solving the Least Squares Method problem in the AHP for 3×3 and 4×4 matrices, *Central European Journal of Operations Research,* **13**, pp. 255-270.

[S-3] Bozóki S. [2005]: Súlyok meghatározása páros összehasonlítás mátrixok legkisebb négyzetes közelítése alapján, *Alkalmazott Matematikai Lapok* (megjelenés alatt).

[S-4] Rapcsák T., Bozóki S., Márton S. [2001]: Banki projektek rangsorolása, MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Osztály.

[S-5] Rapcsák T., Bozóki S., Lakatos V., Selmeczy I. [2003]: Döntési feladatok az Agyfarmban, MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Osztály.

1. Függelék

A 3.6. fejezetben szereplő problémák leírása a HVG 2004-es on-line cikkeiben. A címek felsorolása témák szerint, azon belül pedig időrendi sorrendben történt.

Az M6-os autópálya koncessziós megépítésének és üzemeltetésének pályázata:

- *A kormány ma dönthet az M6-os építőjéről,* (2004. augusztus 4.)
- *Felújítás – Viták az M6-os sztrádáról,* (2004. szeptember 4.)
- *Kuncze: „nem szerelmi kérdés" volt az M6-os pályázata,* (2004. szeptember 9.)

Malév-privatizáció:

- *Malév: az ÁPV Rt. kiírta a privatizációs pályázatot,* (2004. szeptember 7.)
- *Utolsó bevetés – Privatizációs pályázat a Malévra,* (2004. szeptember 18.)
- *Komolytalan ajánlat a Malévre, új tender jöhet,* (2004. október 26.)
- *Új privatizációs pályázat a Malévra,* (2004. november 19.)

A Nemzeti Tankönyvkiadó privatizációja:

- *Kárpótlási jegyet is vár az ÁPV Rt. a Tankönyvkiadóért,* (2004. augusztus 3.)
- *Öten a Tankönyvkiadóért,* (2004. szeptember 25.)
- *Négymilliárdos ajánlat a Tankönyvkiadóért,* (2004. szeptember 20.)
- *Vitéz F. Ibolya, Weyer Béla: Kiadós privatizáció, A Láng holding és a tankönyvpiac,* (2004/48. 101-103. oldal.)
- *Az ÁPV Rt. szerint jó áron kelt el a Tankönyvkiadó – Magánosítás,* (2004. november 26.)

Harmadik generációs mobiltender:

- *Augusztus végéig kiírják a harmadik generációs mobiltendert,* (2004. május 17.)
- *Új szereplők érkezhetnek a magyar mobilpiacra,* (2004. július 6.)
- *Új szereplő a magyar mobilpiacon,* (2004. augusztus 2.)
- *Kiírták a harmadik generációs mobiltendert,* (2004. augusztus 31.)
- *Frekventált piac – Harmadik generációs mobiltender,* (2004. szeptember 4.)
- *Halló! Még nem vagyok itt! – Harmadik generációs mobilok,* (2004. november 6.)
- *Kihirdették a 3G-tender eredményeit – Mégsem léphet új mobilszolgáltató a hazai piacra,* (2004. december 8.)

A nagykörúti villamosok megrendelése:

- *Felmondhatják a nagykörúti villamosok megrendelését,* (2004. április 27.)
- *Vakvágány – Újratárgyalt Siemens-szerződés,* (2004. július 3.)

MTV elnöki pozíciójára kiírt pályázat:

- *MTV-elnökaspiránsok,* (2004. február 14.)

Duna TV elnöki pozíciójára kiírt pályázat:

- *Duna Televízió: ismételt elnökválasztási kísérlet – Pályázat,* (2004. november 23.)

Gépjárműeredetiség-vizsgálatra kiírt közbeszerzési pályázat:

- *A nyertes mindent visz – Harc a gépjárművek hitelesítéséért,* (2004. április 10.)
- *Autóeredet-vizsgálat: Visszavont tender,* (2004/22. szám, 2004. május 29.)

Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Program:

- *A Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Programra 400 pályázat érkezett,* (2004. június 15.)
- *Humánerőforrás-fejlesztés – már több mint 450 pályázat érkezett,* (2004. június 22.)
- *Humán erőforrás fejlesztésére 73 milliárd forint jut,* (2004. szeptember 22.)
- *Az OM humánerőforrás-fejlesztési pályázatain 70 milliárd forintot osztanak szét,* (2004. szeptember 23.)

A Fővárosi Közgyűlés utcabútor-tendere:

- *Négypárti bizottság bírálja az utcabútor-terveket,* (2004. július 21.)

Az informatikai és az oktatási tárca közös, középiskolai műholdas adatszórási programjának kivitelezésére kiírt pályázata:

- *Újabb közbeszerzési zűrök az informatikai tárcánál?,* (2004/48., 2004. szeptember 7.)

Antenna Hungária privatizációja:

- *Kormányzati kommunikáció repteti az Antennát,* (2004. július 20.)
- *Műsorra tűzhetik – Az Antenna Hungária privatizációja,* (2004. október 16.)

A gyógyászati segédeszközgyártó Rehab Rt. privatizációja:

- *Járókeretek – A REHAB-privatizáció előjátéka,* (2004. október 16.)

2. Függelék

Az Agyfarm modellezésének a 8. fejezetben tárgyalt ajánlási feladatain kívül a rendszer működtetése közben fellépő döntési problémákat is feltérképeztük. Az F.1. alfejezetben a csoportképződés, a témák és témaoldalak, valamint az ajánlatok sikerességének problematikáját foglalom össze. Ezt követően a 8. fejezetben többször hivatkozott Kullback-Leibler I-divergencia matematikai hátterét (F.2.), majd a pozitív komponensű vektorok összehasonlításának további módszereit (F.3.) mutatom be. A függeléket az értékelések hasonlóságának módszertani vizsgálata (F.4.) zárja.

F.1. Döntési feladatok az Agyfarm működtetése során

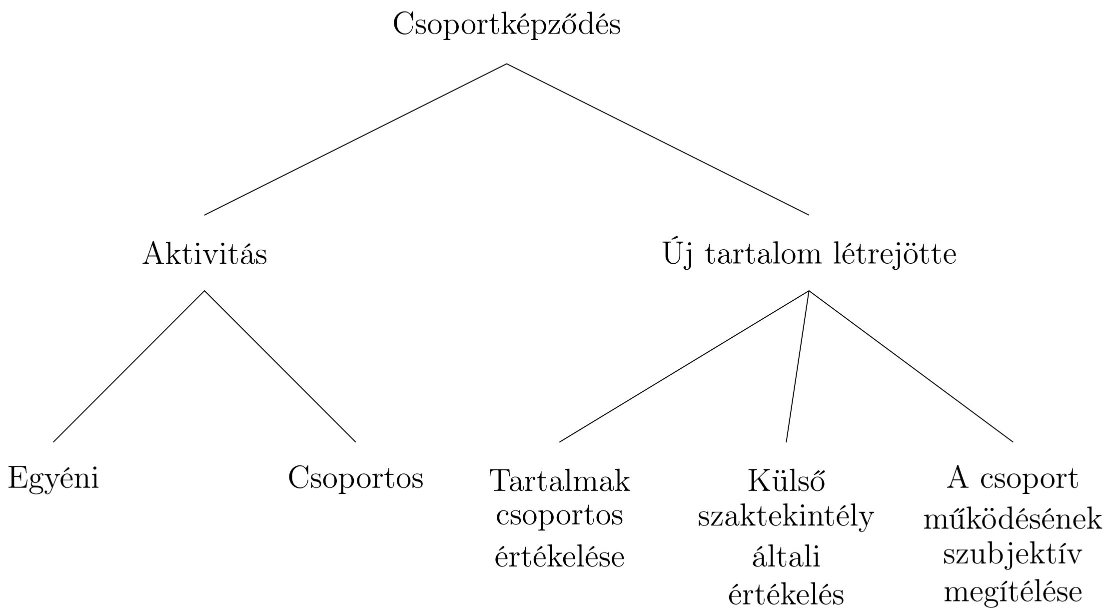
F.1.1. Csoportképződés támogatása

A csoportképződés folyamatát elsősorban a *Tematikus gyűjtőoldalakon* és az *Ötlet-oldalakon* lehet segíteni azzal, hogy a virtuális csoport tagjainak együttműködési ajánlást küld a rendszer. Ennek formája, hogy olyan csoportoldalt ajánl a felhasználónak, amely valójában még nem létezik, épp azáltal jön létre, hogy a vélhetően egy csoportba tartozó felhasználók klikkelnek rá.

Az Agyfarm regisztrált felhasználóinak egy részét akkor tekintjük csoportnak, ha

- tagjai kellően **aktív**ak:
  - az egyéni felhasználói aktivitás mindenkinél, és
  - az aggregált felhasználói aktivitás adott szint felett van,
- az együttműködés során **új tartalom** jött létre, mely az alábbi választható szempontok alapján jellemezhető:
  - létrejött tartalmak csoportos értékelése;
  - létrejött dokumentumok külső szaktekintély általi értékelése;
  - a csoport működésének hatékonysága.

A szempontfa tehát:



22. ábra *A csoportképződés szempontrendszere*

Tartalomnak tekintjük a dokumentumokat, multimédia gyűjteményeket, hírleveleket és fórum üzeneteket. Az új tartalmakat a már rajtuk elvégzett értékelések aggregálása alapján értékeljük.

A létrejött tartalmak csoportos értékelése az Agyfarmon belül történik, és természetesen csak az értékelendő tartalmakra vonatkozik (pl. fórum üzenetekre nem). A létrejött dokumentumok külső szaktekintélyek általi értékelése csak különleges esetekben szükséges, míg a csoport tagjainak egyéni aktivitása és a csoport aktivitása fontos támpontot jelenthet a csoportképződés felismerésében. A csoport működésének hatékonysága szubjektív szempont, ami szerint pl. az Agyfarm egyik üzemeltetője értékelhet.

F.1.2. Csoportképződés támogatása, mint döntési feladat megoldása

Az első kérdés, hogy hogyan osztozzanak az *Aktivitás* és az *Új tartalom* mint főszempontok súlyai a 100%-on? 1 döntéshozó páros összehasonlítása alapján a szempontsúlyok:

aktivitás: 70%;
új tartalom: 30%.

Tematikus gyűjtőoldalakon és az *Ötlet-oldalakon* az *Új tartalom* főszempontnak egyetlen alszempontja van, a *Tartalmak csoportos értékelése.*

Projekt és *Publikációs oldalakon* pedig a három alszempont súlyozása:
tartalmak csoportos értékelése: 57.14%;
külső szaktekintélyek általi értékelés:28.57%;
a csoport működésének szubjektív megítélése: 14.29%.

Az egyéni felhasználói aktivitás mérésének szempontjai és értékelésének hasznossági függvénye:

- létrehozás: 10 pont;
- tisztségviselés: 6 pont;
- írás (tartalom generálás): 3 pont;
- fórum hozzászólás (nem számoljuk);
- tartalom fogyasztás (rendszeres olvasás): 1 pont;
- értékelés (1 pont);
- adminisztrálás, doboz gondozása: 8 pont;
- aktív oldalért járó pont: $0.05 \times$ az oldalon képződő aktivitás-pont;
- más felhasználók általi értékelés: 0.5 pont.

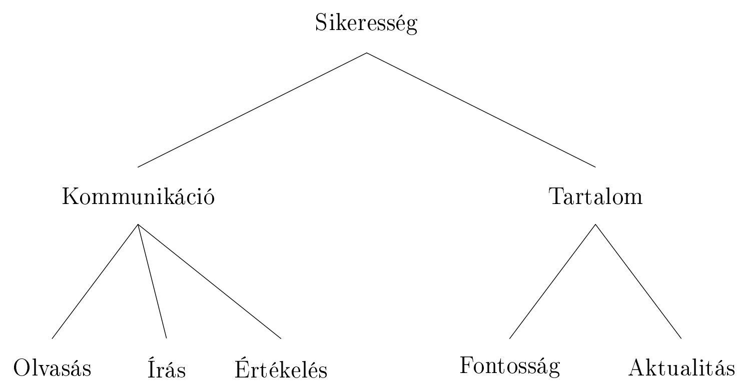
F.1.3. Témák, témaoldalak sikeressége

A témákkal, témaoldalakkal kapcsolatos visszajelzések egyik lehetősége a témák, témaoldalak rangsorolása.

A sikerességnél a következő két főszempontot vesszük figyelembe:

- **kommunikáció** és
- **tartalom**.

Ezen szempontok további alszempontokra bonthatók:



23. ábra *A témaoldal sikerességének szempontrendszere*

F.1.4. Témák, témaoldalak sikeressége, mint többszempontú döntési feladat megoldása

A feladat megoldásához szükség van a rendszer által vezetett statisztikákra *(Kommunikáció)*, illetve a felhasználóknak a *Tartalom* alszempontjai szerinti értékeléseire, majd ezt követően a csoportos értékelésekre.

A szempontok súlyainak meghatározása 3 döntéshozó páros összehasonlításainak eredményeképpen született meg:

kommunikáció: 58%;
tartalom: 42%.

A *Kommunikáció* alszempontjainak súlyai:

olvasás: 15%;
írás: 40%;
értékelés: 45%.

A *Tartalom* alszempontjainak súlyai:

fontosság: 54%;
aktualitás: 46%.

F.1.5. Az ajánlatok sikeressége

A rendszer által adott gépi ajánlások sikerességének rendszeres felmérésével visszacsatolja a rendszer felé, hogy hasznos volt-e a felhasználó számára az adott ajánlás, így segít a pontosabb gépi ajánlások nyújtásában az ajánló rendszer paramétereienek változtatásán keresztül. A gépi ajánlatok sikerességének mérőszámai lehetnek:

- az ajánlott felhasználók közül hánnyal alakult ki tényleges kapcsolat;
- az ajánlott tartalmak közül hányat néztek meg, mentettek el, linkeltek be, stb.;
- az ajánlott tartalmak közül hányat értékeltek (pozitívan és negatívan).

F.2. A Kullback-Leibler *I*-divergencia matematikai háttere

Az Agyfarm rendszerében számos alkalommal szükség van vektorok egymástól való eltérésének meghatározására. A 8.3. alfejezetben felsorolt ajánlások egyik szempontja a felhasználók érdeklődését, valamint az egyes oldalak tematikáját leíró kulcsszóvektorok hasonlóságának mértéke. A pozitív komponensű vektorok összehasonlítására vonatkozóan a Kullback-Leibler I-divergencia alkalmazási lehetőségét vizsgáljuk meg, majd az F.3. alfejezetben összevetjük más módszerekkel.

Legyen adott két pozitív komponensekből álló vektor, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_s)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_s)$. A feladat: meghatározni $\mathbf{v}$-nek az $\mathbf{u}$-tól való eltérését.

A Kullback-Leibler I-divergenciát alkalmazva a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{u}$ vektortól való eltérését mérjük a

$$KL(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{s} u_j \log\left(\frac{u_j}{v_j}\right) - \sum_{i=1}^{s} u_j + \sum_{i=1}^{s} v_j, \qquad \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^s,$$

mennyiséggel, ahol $\mathbb{R}_+^s$ jelöli az s-dimenziós Euklideszi tér pozitív ortánsát.

Abban az esetben, ha az összehasonlítandó vektoroknak nulla komponensei is vannak, akkor nem alkalmazható a képlet, hiszen sem a nevezőben, sem a logaritmus argumentumában nem lehet nulla. Megnézhetjük viszont az összeg megfelelő tagjainak határértékét 0-ban:

$$\lim_{v_1 \to 0} \left[u_1 \log\left(\frac{u_1}{v_1}\right) - u_1 + v_1 \right] = +\infty.$$

A

$$KL^*(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{s} v_j \log\left(\frac{v_j}{u_j}\right) - \sum_{i=1}^{s} v_j + \sum_{i=1}^{s} u_j, \qquad \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^s,$$

eltérés esetén

$$\lim_{v_1 \to 0} \left[v_1 \log\left(\frac{v_1}{u_1}\right) - v_1 + u_1 \right] = u_1.$$

A második módon definiált eltérés tehát (jobbról) folytonos 0-ban, ami lehetőséget ad arra, hogy $v_1 = 0$-ban a határértékével, azaz u_1-gyel definiáljuk a megfelelő tagot.
Kulcsszó-vektorok összehasonlításánál ez azt jelenti, hogy ha egy u_1 súlyú kulcsszónak nincs pozitív súlyú párja, akkor az eltérés mértéke éppen u_1 lesz, amit büntetésként is értelmezhetünk. Ilyen módon lehetővé válik a nemnegatív ortáns vektorainak összehasonlítása. Ha a kulcsszavak egymás közti kapcsolatát nem vesszük figyelembe, akkor a fenti kiterjesztés nem alkalmazható, mivel nincs további információ arra az esetre, ha a kulcsszóvektor egyik komponense 0.

Megvizsgáltuk, milyen eredményt kapunk a Kullback-Leibler I-divergenciára különböző dimenziójú vektorok esetén. Azt tapasztaltuk, hogy minél nagyobb a komponensek száma, valamint minél inkább eltérőek a komponensek, annál jelentősebb eltérés mutatkozik a Kullback-Leibler I-

divergencia értékeire is. Ez utóbbi egybeesik az Agyfarmban történő alkalmazás céljaival, az eltérésnek a komponensek számával való fordított arányossága azonban nem. Azt szeretnénk ugyanis, hogy ha két vektornak sok közös komponense van, akkor azokat hasonlónak nevezhessük. E célból a következő pontelosztást javasoljuk a pozitív komponensű vektorok hasonlóságának értékelésére:
ha a vektorok

- 1 komponensben egyeznek meg, akkor 0-7 pontot lineárisan osztunk szét,
- 2 komponensben egyeznek meg, akkor 7-21 pontot lineárisan osztunk szét,
- 3 komponensben egyeznek meg, akkor 21-49 pontot lineárisan osztunk szét,
- 4 komponensben egyeznek meg, akkor 49-69 pontot lineárisan osztunk szét,
- 5 vagy több komponensben egyeznek meg, akkor a maximális 70 pontot kapja.

Az egyes szinteken belüli köztes pontszámokat a Kullback-Leibler I-divergenciából számolt érték megfelelő skálázásával nyerjük.

F.3. A pozitív komponensű vektorok hasonlóságának mérésének további módszerei

Megvizsgáltuk a pozitív komponensű vektorok hasonlóságának mérésére szolgáló legismertebb módszereket. Az előző alfejezetben tárgyalt Kullback-Leibler I-divergencia mellett számpéldákon teszteltük a cosinus-mérték vagy skaláris szorzat:

$$SK(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} u_j v_j, \qquad \text{ahol } \mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}_+^d,$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}_+^d,$$

valamint az euklideszi távolság:

$$EUK(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (u_j - v_j)^2}, \qquad \text{ahol } \mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}_+^d,$$
$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}_+^d,$$

által kapott hasonlóság-definíciókat. Eredményeink az alábbiak szerint foglalhatók össze:

- a cosinus mérték pozitív komponensű vektorok hasonlóságának mérésére akkor alkalmas mérték, ha a vektorok egységnyiek;
- ha gyakoriságokat jelentenek a komponensek, akkor a cosinus mérték használata nem javasolt;
- az euklideszi távolság mérésénél figyelembe vesszük azt is, mekkorák a vektorok komponensei és mekkora szöget zárnak be a vektorok, azonban az euklideszi távolságot nagyon megnövelheti egy-két kiugró komponens;
- gyakoriságokat tartalmazó vektorok esetén a vektorok hasonlóságának mérésekor leginkább a Kullback-Leibler I-divergencia veszi figyelembe a komponensek nagyságát; egy-két kiugró nagyságú komponens esetén kevésbé büntet, mint az euklideszi távolság; akkor számítjuk ki, ha a két vektorban azonos helyeken van pozitív komponens;
- ha nagy a komponensek száma, akkor a Kullback-Leibler I-divergenciára kevésbé eltérő értékek esetén is viszonylag magas érték adódik.

Javaslat az Agyfarmban történő alkalmazásra:

- egységvektorok esetén a cosinus mérték jó eszköz arra, hogy megállapítsuk a vektorok hasonlóságát, hiszen az csak a vektorok szögétől függ;
- gyakoriságokat tartalmazó vektorok esetén a Kullback-Leibler I-divergencia mutatja legjobban a vektorok hasonlóságát, mivel figyelembe veszi a komponensek nagyságát;
- 0 és 1 komponensű vektorok hasonlóságát cosinus mértékkel mérjük, mert minél több az egyező pozitív komponens, annál kisebb a két vektor szöge.

F.4. Az értékelések hasonlóságának vizsgálata

Az értékeléseket az

$$\mathbf{E_1} = (e_1, e_2, \ldots, e_d) \in \mathbb{R}^d,$$
$$\mathbf{E_2} = (f_1, f_2, \ldots, f_d) \in \mathbb{R}^d$$

vektorok tartalmazzák, ahol $e_1, e_2, \ldots, e_d, f_1, f_2, \ldots, f_d$ értékei az adott értékelési feladatban meghatározott pozitív, nulla vagy negatív számokat; illetve a szubjektív ítéleteket jobban leíró verbális kategóriákat vehetik fel. A számolhatóság érdekében ezeket egységesen a $[-5, +5]$ intervallumba skálázzuk:

$$\begin{aligned} -5 &: \text{a legrosszabb értékelés;} \\ 0 &: \text{közömbös;} \\ +5 &: \text{a legjobb értékelés.} \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy ismertek az

$$\mathbf{E_1'} = (e_1', e_2', \ldots, e_d') \in \mathbb{R}^d,$$
$$\mathbf{E_2'} = (f_1', f_2', \ldots, f_d') \in \mathbb{R}^d$$

vektorok, ahol $e_1', e_2', \ldots, e_d', f_1', f_2', \ldots, f_d' \in [-5, +5]$.

Az értékelő vektorok hasonlóságát definiáljuk az

$$SK(\mathbf{E_1'}, \mathbf{E_2'}) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} e_j' f_j'$$

skaláris szorzattal, melyet a komponensek számával normálunk, elkerülendő azt, hogy nagyságrendi különbségek alakulhassanak ki csak azért, mert különböző hosszúságú értékelő vektorokkal dolgozunk.

Ha két felhasználó nagyon hasonlóan értékelt, pl. +3 ill. +4 transzformált értékekkel, akkor a skaláris szorzatot ezen tagja 12-vel növeli. Míg ha egy másik tartalmat +5 ill. -3 transzformált értékekkel illettek, akkor 15-tel csökken az összeg, hiszen ezek egymásnak ellentmondó értékelések.

A definícióból következik, hogy $-25 \leq SK(\mathbf{E_1'}, \mathbf{E_2'}) \leq +25$ tetszőleges $\mathbf{E_1'}, \mathbf{E_2'}$ vektorok esetén. Ez az intervallum könnyen transzformálható az általánosan használt 0-100-as skálára.